ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1969

УДК 539.186.2

В. С. ПОТАПОВ, А. М. БРОДСКИЙ, В. В. ТОЛМАЧЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЕЧЕНИЯ ПЕРЕЗАРЯДКИ В НИЗШИХ ПОРЯДКАХ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ ЧЛЕНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ОЦЕНКА ЧЛЕНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В настоящей статье, продолжающей [1], рассмотрены члены второго порядка в выражении для амплитуды перезарядки при $1\,s\to 1\,s$ рассеянии быстрого протона на атоме водорода. Сделана также оценка вкладов членов третьего порядка и выписаны выражения для дифференциального и полного сечений. В работе сохранены обозначения и использован метод расчета [1].

§ 1. Члены второго порядка

Выражение для амплитуды во втором порядке теории возмущений складывается из следующих членов:

$$T_{if}^{\text{II}B}=\langle \vec{k}_f n_f\,|\,V_3G_0V_3+V_3G_0V_2+V_1G_0V_3+V_1G_0V_2\,|\,\vec{k}_i n_i\rangle\equiv$$
$$\equiv T_{33}+T_{32}+T_{13}+T_{12}. \tag{1}$$

При вычислении ведущих асимптотик отдельных матричных элементов используется метод, изложенный в § 2 работы [1].

Для упрощения записи последующих интегралов введем обозначения:

$$a=\frac{m_e}{m_e+m_p};\quad b=\frac{m_p}{m_e+m_p};\quad c=\frac{2m_p+m_e}{2\,(m_e+m_p)};\quad \tilde{v}=\frac{v_0}{v};\quad k_0=|\vec{k}_i|=|\vec{k}_f|.$$

Рассмотрим сначала матричный элемент

$$T_{33}=\int d\vec{p}\,\psi_f(\vec{p}-a\vec{k}_f)\,\psi_i(\vec{p}+a\vec{k}_i)\times$$
$$\times\int\frac{V_3\left(\vec{q}-\vec{k}_f+\frac{1}{2}\vec{p}\right)V_3'\left(\vec{q}-\vec{k}_i-\frac{1}{2}\vec{p}\right)}{\frac{1}{2\mu_{pp}}q^2+\frac{1}{2\mu_e}p^2-\frac{1}{2\mu_p}k_0^2+E_0-i\varepsilon}\,d\vec{q}. \tag{2}$$

При $\tilde{v} \ll 1$ основной вклад в асимптотику будут давать следующие области.

1. В интеграле по $\vec{p}$ области локализации волновых функций — окрестности точек $\vec{p} = a\vec{k}_f$, $\vec{p} = -a\vec{k}_i$. Если $(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 \gg q_0^2$, то эти области будут хорошо разделены, и вклады от них можно учитывать по отдельности. Обозначим эти области $\Omega_{\vec{p}=a\vec{k}_f}$, $\Omega_{\vec{p}=-a\vec{k}_i}$.

2. При $\vec{p} \in \Omega_{\vec{p}=a\vec{k}_f}$ наибольший вклад в интеграл по $\vec{q}$ будет происходить от окрестности точки $\vec{q} = c\vec{k}_f$, в которой при $\tilde{v} \to 0$ совпадают сингулярности G_0 и V_3, в то время как V_3' несингулярен в этой точке. Обозначим эту область $\Omega_{\vec{q}=c\vec{k}_f}$.

3. При $\vec{p} \in \Omega_{\vec{p}=-a\vec{k}_i}$ $\vec{q} \in \Omega_{\vec{q}=c\vec{k}_i}$ совпадают сингулярности V_3', G_0.

Таким образом, асимптотика T_{33} будет определяться следующими интегралами:

$$T_{33} \approx 2\mu_{pp}\psi_i(\vec{q}_i + \vec{q}_f)\, V_3'(\vec{q}_i) \int\limits_{\Omega_{\vec{p}=a\vec{k}_f}} d\vec{p}\,\psi_f(\vec{p} - a\vec{k}_f) \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_{\vec{q}=c\vec{k}_f}} \frac{d\vec{q}\, V_3(\vec{q} - c\vec{k}_f)}{q^2 - c^2k_0^2 + 2\mu_{pp}E_0 - i\varepsilon}\, 2\mu_{pp}\psi_f(\vec{q}_i + \vec{q}_f)\, V_3(\vec{q}_f) \times$$

$$\times \int\limits_{\Omega_{\vec{p}=-a\vec{k}_i}} d\vec{p}\,\psi_i(\vec{p} + a\vec{k}_i) \cdot \int\limits_{\Omega_{\vec{q}=c\vec{k}_i}} dq\, \frac{V_3'(\vec{q} - c\vec{k}_i)}{q^2 - c^2k_0^2 + 2\mu_{pp}E_0 - i\varepsilon}. \qquad (3)$$

Каждый из интегралов по $\vec{q}$ заменой $\vec{q} = k_0\vec{q}'$ приводится к виду, рассмотренному в [1], см. (16). Асимптотика интеграла по $\vec{p}$ получена в [1], см. (26), так что при $\tilde{v} \to 0$

$$T_{33} \approx -\frac{2N_i\tilde{v}\ln\tilde{v}^2}{q_i^2(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^4}, \qquad (4)$$

где $N = \dfrac{4}{\pi^2} q_0^4 v_0$.

Если $(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 \approx q_0^2$, то области $\Omega_{\vec{p}=a\vec{k}_f}$ и $\Omega_{\vec{p}=-a\vec{k}_i}$ будут пересекаться, и главный вклад в интеграл будет давать общая область $\Omega_{\vec{p}}$, содержащая обе точки, однако когда $\vec{p} \in \Omega_{\vec{p}}$, области сингулярностей в интеграле по q будут по-прежнему хорошо разделены, и вклад от них можно учитывать по отдельности, причем для каждого вклада получено выражение, аналогичное (16) [1]. Асимптотика интеграла по $\vec{p}$ была вычислена в [1] (27), так что в случае $(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 \approx q_0^2$ имеем

$$T_{33} \approx -\frac{4Ni\tilde{v}\ln\tilde{v}^2}{q_i^2[(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 + 4q_0^2]^2}. \qquad (5)$$

Рассмотрим далее

$$T_{13}=2\mu_{ep}\int\psi_f(p)V_3(\vec{p}+\vec{q}_i)\,d\vec{p}\int\frac{\psi_i(\vec{q}-\vec{p}_1)V_1(\vec{q}+\vec{p}_0)}{q^2-p_0^2+p^2+q_0^2-i\varepsilon}d\vec{q}, \qquad (6)$$

где $\vec{p}_0=b(\vec{p}+\vec{q}_i)+\vec{q}_f$, $\vec{p}_1=a(\vec{p}+\vec{q}_i)$.

Асимптотика T_{13} определяется следующими особенностями: 1) $\Omega_{\vec{p}=0}$, $\Omega_{\vec{q}=\vec{p}_1}$ — совпадение при $\tilde{v}\to 0$ сингулярностей ψ_f, ψ_i; 2) $\Omega_{\vec{p}=0}$, $\Omega_{\vec{q}=-\vec{p}_0}$ — совпадение сингулярностей ψ_f, V_1, G_0; 3) $\Omega_{\vec{p}=-\vec{q}_i}$, $\Omega_{\vec{q}=\vec{p}_1}$ — совпадение сингулярностей V_3, ψ_i, G_0.

В первых двух случаях особенности в интеграле по $\vec{q}$ будут хорошо разделены, лишь если $|\vec{p}_1+\vec{p}_0|\approx|\vec{q}_i+\vec{q}_f|\gg q_0$. При этом вклад от соответствующих областей можно учитывать по отдельности, что приводит к асимптотике (см. (14), (17) и (26) [1]):

$$\frac{N\left(1+\frac{1}{M}\right)}{q_i^2(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4}+\frac{N}{q_i^2(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4}\,i\tilde{v}\ln\tilde{v}^2. \qquad (7)$$

Если $|\vec{q}_i+\vec{q}_f|\approx q_0$, то области $\Omega_{\vec{q}=\vec{p}_1}$ $\Omega_{\vec{q}=-\vec{p}_0}$ пересекаются, и при вычислении асимптотики необходимо учитывать все три знаменателя в интеграле по $\vec{q}$. Асимптотика интеграла по $\vec{q}$ в этом случае была получена нами в [1] (23); для вклада в T_{13} от первых двух областей имеем выражение

$$\frac{4i}{\pi^6}\frac{q_0^5v_0}{q_i^2}\tilde{v}\ln\tilde{v}^2\int\limits_{\Omega_{\vec{p}=0}}\frac{dp}{[p^2+q_0^2]^2[(\vec{p}+\vec{q}_i+\vec{q}_f)^2+q_0^2]^2}\approx\frac{Ni\tilde{v}\ln\tilde{v}^2}{q_i^2[(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^2+4q_0^2]^2}. \qquad (8)$$

Вклад от третьей системы областей представим в виде

$$\frac{\mu_{ep}}{a}\psi_f(q_i)V_1(q_f)\int\limits_{\Omega_{\vec{p}=0}}\psi_i(p)\,d\vec{p}\int\limits_{\Omega_{\vec{q}=\vec{q}_1}}\frac{V_3(\vec{q}-\vec{q}_1)\,d\vec{q}}{q^2-q_1^2+q_0^2-i\varepsilon}, \qquad (9)$$

где $\vec{q}_1=c\vec{k}_i$. Согласно результатам [1] (см. (16) и (26)) этот интеграл имеет асимптотику

$$\frac{N}{q_i^6}\,i\tilde{v}\ln\tilde{v}^2. \qquad (10)$$

Заметим, что в силу тождественности протонов, а также ввиду того, что начальное и конечное связанные состояния одинаковы (в $1s\to 1s$ рассеянии), $T_{13}(\vec{k}_i\vec{k}_f)=T_{32}(\vec{k}_f\vec{k}_i)$, так что сумма этих матричных элементов имеет асимптотику

$$T_{13}+T_{32}\approx\frac{2N\left(1+\frac{1}{M}\right)}{q_i^2(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4}+\frac{2Ni\tilde{v}\ln\tilde{v}^2}{q_i^2(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4}+\frac{2N}{q_i^6}\,i\tilde{v}\ln\tilde{v}^2, \qquad (11)$$

если $(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 \gg q_0^2$;

$$T_{13} + T_{32} \approx \frac{2N}{q_i^2} \frac{i\tilde{v} \ln \tilde{v}^2}{[(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 + 4q_0^2]^2}, \tag{12}$$

если $(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 \approx q_0^2$.

Рассмотрим, наконец:

$$T_{12} = \int \frac{\psi_f(\vec{p}_1 - b\vec{k}_f) V_2(\vec{p}_1 - \vec{k}_i) \psi_i(\vec{p}_2 + b\vec{k}_i) V_1(\vec{p}_2 + \vec{k}_f)}{\frac{(\vec{p}_2 + b\vec{p}_1)^2}{2\mu_{ep}} + \frac{p_1^2}{2\mu_p} - \frac{k_0^2}{2\mu_p} + E_0 - i\varepsilon} d\vec{p}_1 d\vec{p}_2. \tag{13}$$

Вклад в асимптотику T_{12} будут давать следующие области: 1) $\Omega_{\vec{p}_2 = -b\vec{k}_i}$, $\Omega_{\vec{p}_1 = \vec{k}_i}$ — совпадение сингулярностей V_2, G_0, ψ_i; 2) $\Omega_{\vec{p}_2 = -\vec{k}_f}$, $\Omega_{\vec{p}_1 = b\vec{k}_f}$ — совпадение сингулярностей V_1, G_0, ψ_f; 3) $\Omega_{\vec{p}_1 = b\vec{k}_f}$, $\Omega_{\vec{p}_2 = -b\vec{k}_i}$ — совпадение сингулярностей ψ_i, ψ_f, а также сингулярности G_0, если $q_i^2 \approx \frac{(2M+1)^2}{M^2(M+1)^2} k_0^2$. Вклад от первых двух областей представим в виде интегралов, аналогичных по структуре (9), для которых имеем асимптотику

$$-\frac{2N}{q_i^6} i\tilde{v} \ln \tilde{v}^2. \tag{14}$$

Для нахождения вклада от третьей системы областей следует рассмотреть интеграл

$$2\mu_{ep} V_1(q_f) V_2(q_i) \int\limits_{\Omega_{\vec{p}_1 = b\vec{k}_f}} \psi_f(\vec{p}_1 - b\vec{k}_f) d\vec{p}_1 \int\limits_{\Omega_{\vec{p}_2 = -b\vec{k}_i}} \frac{\psi_i(\vec{p}_2 + b\vec{k}_i) d\vec{p}_2}{(\vec{p}_2 + b\vec{p}_1)^2 + p_1^2 - k_0^2 + q_0^2 - i\varepsilon}. \tag{15}$$

Используя формулу (15) [1] сначала при интегрировании по $\vec{p}_2$, а затем при интегрировании по $\vec{p}_1$, для главного члена разложения при $\tilde{v} \to 0$ получим выражение

$$\frac{N\left(1 + \frac{1}{M}\right)^2}{q_i^4 \left[q_i^2 - \frac{(2M+1)^2}{M^2(M+1)^2} k_0^2 - 4i\tilde{v} \frac{(2M+1)^2}{M^2(M+1)^2} k_0^2\right]}. \tag{16}$$

Таким образом асимптотика T_{12} представляется в виде

$$T_{12} \approx \frac{N\left(1 + \frac{1}{M}\right)^2}{q_i^4 \left[q_i^2 - \left(\frac{m_e}{\mu_p} k_0\right)^2 - 4i\tilde{v} \left(\frac{m_e}{\mu_p} k_0\right)^2\right]} - \frac{2N}{q_i^6} i\tilde{v} \ln \tilde{v}^2. \tag{17}$$

Сравнивая выражения для T_{12} с выражениями для $T_{13}+T_{32}$ и T_{33} в области $(\vec{q}_i + \vec{q}_f)^2 \gg q_0^2$, находим, что логарифмические члены этих матричных элементов взаимно сокращаются, так что ведущими членами T_{if}^{IIB} в указанной области изменения углов являются члены, возникающие из областей сингулярностей волновых функций связанных состояний. Именнно, асимптотика T_{if}^{IIB} определяется выражением

$$T_{if}^{IIB}=N\left[\frac{2\left(1+\frac{1}{M}\right)}{(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4 q_i^2}+\frac{\left(1+\frac{1}{M}\right)^2}{q_i^4\left[q_i^2-\left(\frac{m_e}{\mu_p}k_0\right)^2-4i\tilde{v}\left(\frac{m_e}{\mu_p}k_0\right)^2\right]}\right]. \qquad (18)$$

В области $(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^2\approx q_0^2$ логарифмические члены $T_{13}+T_{32}$ и T_{33} не компенсируются, что приводит к асимптотике

$$T_{if}^{IIB}=-2Ni\tilde{v}\ln\tilde{v}^2\,\frac{1}{q_i^2\,[(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^2+4q_0^2]^2}. \qquad (19)$$

§ 2. Оценка членов третьего порядка

Использованная выше техника анализа асимптотик сингулярных интегралов применяется в настоящем параграфе для оценки асимптотического поведения членов третьего порядка. Третий порядок теории возмущений состоит из следующих членов:

$$T_{if}^{IIIB}=\sum_{j=1}^{3}\langle n_f\vec{k}_f\,|\,(V_1+V_3)\,G_0V_jG_0\,(V_3+V_2)\,|\,n_i\vec{k}_i\rangle\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{3}T_{3j3}+T_{3j2}+T_{1j3}+T_{1j2}. \qquad (20)$$

Рассмотрим, например, члены с $j=3$ в области $(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^2\gg q_0^2$. Имеем выражение для T_{333}:

$$T_{333}=\langle\vec{k}_f n_f\,|\,V_3'G_0'V_3G_0V_3''\,|\,\vec{k}_i n_i\rangle=\int\psi_f(\vec{p}-a\vec{k}_f)\,\psi_i(\vec{p}+a\vec{k}_i)\,d\vec{p}\times$$

$$\times\int\frac{V_3'\left(\vec{q}-\vec{k}_f+\frac{1}{2}\vec{p}\right)d\vec{q}}{\frac{q^2}{2\mu_{pp}}+\frac{p^2}{2\mu_e}-E-i\varepsilon}\int\frac{V_3(q'-q)\,V_3''\left(\vec{q}'-k_i-\frac{1}{2}\vec{p}\right)}{\frac{q'^2}{2\mu_{pp}}+\frac{p^2}{2\mu_e}-E-i\varepsilon}\,d\vec{q}'. \qquad (21)$$

Основной вклад в асимптотику (21) дают следующие области: 1) $\Omega_{\vec{p}=a\vec{k}_f}$, $\Omega_{\vec{q}=c\vec{k}_f}$ — совпадение сингулярностей ψ_f, V_3', G_0', 2) $\Omega_{\vec{p}=-a\vec{k}_i}$, $\Omega_{\vec{q}'=c\vec{k}_i}$ — совпадение сингулярностей ψ_i, V_3'', G_0. Учет вкладов от этих областей приводит к асимптотике

$$T_{333}=-\frac{2N}{q_i^2\,(q_i+q_f)^4}\,\tilde{v}^2\ln^2\tilde{v}^2. \qquad (22)$$

Рассмотрим далее

$$T_{332}=\langle\vec{k}_f n_f|V_3G_0V_3'G_0V_2\,|\,\vec{k}_i n_i\rangle=\int d\vec{p}_3\,\psi_f(\vec{p}_3-a\vec{k}_f)\times$$

$$\times\int\frac{\psi_i(\vec{p}_2+b\vec{k}_i)\,V_2(\vec{p}_2+\vec{p}_3+\vec{k}_i)}{\frac{p_2^2}{2\mu_p}+\frac{(\vec{p}_3+a\vec{p}_2)^2}{2\mu_{ep}}-E-i\varepsilon}\,d\vec{p}_2\times$$

$$\times \int \frac{V_3\left(\vec{q}+\frac{1}{2}\ \vec{p}_3-\vec{k}_f\right) V_3'\left(\vec{q}+\vec{p}_2+\frac{1}{2}\vec{p}_3\right)}{\frac{q^2}{2\mu_{pp}}+\frac{p_3^2}{2\mu_e}-E-i\varepsilon}\, d\vec{q}. \qquad (23)$$

Главный вклад в (25) происходит от областей: 1) $\Omega_{\vec{p}_2=-b\vec{k}_i}$, $\Omega_{\vec{p}_3=-a\vec{k}_i}$, $\Omega_{\vec{q}=c\vec{k}_i}$ — совпадение сингулярностей ψ_i, V_2, V_3', G_0, G_0. Для вклада от этой системы областей получено выражение

$$N \frac{1}{q_i^2 (\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4} \tilde{v}^2 \ln^2 \tilde{v}^2; \qquad (24)$$

2) $\Omega_{\vec{p}_2=-\vec{k}_f}$, $\Omega_{\vec{p}_3=a\vec{k}_f}$, $\Omega_{\vec{q}=c\vec{k}_f}$ — совпадение сингулярностей ψ_f, G_0, G_0, V_3, V_3'. Эта система областей дает вклад

$$\frac{N}{q_i^6} \tilde{v}^2 \ln^2 \tilde{v}^2; \qquad (25)$$

3) $\Omega_{\vec{p}_3=a\vec{k}_f}$, $\Omega_{\vec{p}_2=-b\vec{k}_i}$, $\Omega_{\vec{q}=c\vec{k}_f}$ — совпадение сингулярностей ψ_i, ψ_f, V_3, G_0, причем для вклада в асимптотику имеем выражение

$$-N\left(1+\frac{1}{M}\right)\frac{1}{q_i^2(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4}\, i\tilde{v}\ln \tilde{v}^2. \qquad (26)$$

Заметим, что в силу тождественности частиц 1 и 2, а также из-за того, что начальное и конечное связанные состояния в $1s \to 1s$ рассеянии совпадают, $T_{133}=T_{332}$, так что $T_{133}+T_{332}=2T_{332}$.

Найдем, наконец, асимптотическое поведение:

$$T_{132} = \langle \vec{k}_f n_f | V_1 G_0 V_3 G_0 V_2 | \vec{k}_i n_i \rangle = \int \psi_f(\vec{p}_1 - b\vec{k}_f)\, d\vec{p}_1 \int \psi_i(\vec{p}_2 + b\vec{k}_i)\, d\vec{p}_2 \times$$

$$\times \int \frac{V_1(\vec{p}_3+\vec{p}_1-\vec{k}_f)\, V_2(\vec{p}_3+\vec{p}_2+\vec{k}_i)\, V_3(\vec{p}_3+\vec{p}_1+\vec{p}_2)}{\left[\frac{(\vec{p}_3+a\vec{p}_1)^2}{2\mu_{ep}}+\frac{p_1^2}{2\mu_p}-E-i\varepsilon\right]\left[\frac{(\vec{p}_3+a\vec{p}_2)^2}{2\mu_{ep}}+\frac{p_2^2}{2\mu_p}-E-i\varepsilon\right]}\, d\vec{p}_3. \qquad (27)$$

Главные члены асимптотики T_{132} происходят из следующих областей: 1) $\Omega_{\vec{p}_1=b\vec{k}_f}$, $\Omega_{\vec{p}_2=-b\vec{k}_i}$, $\Omega_{\vec{p}_3=a\vec{k}_f}$ — совпадение сингулярностей ψ_i, ψ_f, V_1, G_0; 2) $\Omega_{\vec{p}_1=b\vec{k}_f}$, $\Omega_{\vec{p}_2=-b\vec{k}_i}$, $\Omega_{\vec{p}_3=-a\vec{k}_i}$ — совпадение сингулярностей ψ_i, ψ_f, V_2, G_0. Для вклада в асимптотику от этих двух областей получено выражение

$$2N\left(1+\frac{1}{M}\right)\frac{1}{q_i^2(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4}\, i\tilde{v}\ln\tilde{v}^2, \qquad (28)$$

3) $\Omega_{\vec{p}_1=\vec{k}_i}$, $\Omega_{\vec{p}_2=-b\vec{k}_i}$, $\Omega_{\vec{p}_3=-a\vec{k}_i}$ — совпадение сингулярностей V_2, G_0, ψ_i, G_0, V_3, 4) $\Omega_{\vec{p}_1=b\vec{k}_f}$, $\Omega_{\vec{p}_2=-\vec{k}_f}$, $\Omega_{p_3=ak_f}$ — совпадение сингулярностей ψ_f, G_0, V_3, G_0, V_1. Эти области дают вклад

$$-\frac{2N}{q_i^6}\tilde{v}^2\ln^2\tilde{v}^2. \qquad (29)$$

Сопоставив асимптотические выражения для членов третьего порядка с $j=3$, (22), (24), (25), (26), (28), (29), находим, что главные члены этих матричных элементов сокращаются, так:

$$T_{333}+T_{133}+T_{332}+T_{132}\approx\frac{1}{(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4 q_i^2}\,O(\tilde{v})+\frac{1}{q_i^6}\,O(\tilde{v}^2)\approx\frac{1}{v^7}. \qquad (30)$$

Аналогично сокращаются ведущие логарифмические члены матричных элементов с $j=1$, 2 в (20) в общей области изменения углов, давая

$$T_{313}+T_{113}+T_{312}+T_{112}\approx\frac{1}{v^7},$$

$$T_{323}+T_{123}+T_{322}+T_{122}\approx\frac{1}{v^7}.$$

§ 3. Результаты расчета

Окончательные результаты расчета различных членов, входящих в выражение для T_{if}, сведены в таблицу, причем T_{if} равно сумме членов, указанных в первом столбце, умноженной на N.

$$\left(\text{В табл. } \tilde{q}_i^2=\frac{q_i^2}{k_0^2}\right).$$

Из результатов, приведенных в таблице, следует, что в общей области изменения углов члены первого и второго порядков, за исключением $V_{pp}G_0V_{pp}$, дают одинаковый вклад $\sim\frac{1}{v^6}$ в асимптотическое поведение T_{if}, и, следовательно, дифференциальное сечение и вклад в полное сечение от общей области изменения углов убывает, как $\frac{1}{v^{12}}$. Член $V_{pp}G_0V_{pp}$ дает меньший вклад, причем, как показано в § 1, в общей области углов ведущий вклад $V_{pp}G_0V_{pp}$ компенсируется соответствующими логарифмическими асимптотиками членов $V_{pp}G_0V_{pe}$ и $V_{pe}G_0V_{pp}$. Следует отметить, что в общей области углов имеет место частичная компенсация ведущих вкладов членов V_{pp} и $V_{pp}G_0V_{pe}+V_{pe}G_0V_{pp}$. При этом вклад суммы указанных членов является все же весьма существенным. Действительно, в угловых переменных имеем:

$$V_{pp}+V_{pp}G_0V_{pe}+V_{pe}G_0V_{pp}\approx\frac{M^3}{4k_0^6(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)^2}, \qquad (31)$$

в то время как

$$V_{pe}+V_{pe}G_0V_{pe}\approx\frac{1}{4k_0^6(1-\cos\theta)^3}, \qquad (32)$$

где $\cos\theta=\frac{(\vec{k}_i,\vec{k}_f)}{|\vec{k}_i|\,|\vec{k}_f|}$.

Из сравнения приведенных выражений следует, что при $\theta\gg 0$ члены (31) дают вклад приблизительно в M^3 раз больший, чем члены (32).

Рассмотрим далее область углов $\theta\approx\pi$. В этой области асимптотика определяется членами, содержащими протон-протонное взаимодействие,

X	Общая область	Порядок убывания при $v\to\infty$	Область $(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^2\approx q_0^2$	Порядок убывания при $v\to\infty$	Область $\tilde{q}_i^2\approx\frac{4}{M^2}\pm\tilde{v}\frac{1}{M^2}$	Порядок убывания при $v\to\infty$
V_{pp}	$\frac{2}{q_i^2(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4}$	$\frac{1}{v^6}$	$\frac{2}{q_i^2[(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^2+4q_0^2]^2}$	$\frac{1}{v^2}$	—	—
V_{pe}	$-\frac{1}{q_i^6}$	$\frac{1}{v^6}$	—	—	—	—
$V_{pp}G_0V_{pp}$	$\frac{4i\tilde{v}\ln\tilde{v}}{q_i^2(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4}$	$\frac{\ln v}{v^7}$	$\frac{8i\tilde{v}\ln\tilde{v}}{q_i^2[(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^2+4q_0^2]^2}$	$\frac{\ln v}{v^3}$	—	—
$V_{pp}G_0V_{pe}^{+}$ $+V_{pe}G_0V_{pp}$	$-\frac{2\left(1+\frac{1}{M}\right)}{q_i^2(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^4}$	$\frac{1}{v^6}$	$-\frac{4i\tilde{v}\ln\tilde{v}}{q_i^2[(\vec{q}_i+\vec{q}_f)^2+4q_0^2]^2}$	$\frac{\ln v}{v^3}$	—	—
$V_{pe}G_0V_{pe}$	$-\frac{\left(1+\frac{1}{M}\right)^2}{q_i^4\left[q_i^2-\frac{4}{M^2}k_0^2\right]}$	$\frac{1}{v^6}$	—	—	$-\frac{\left(1+\frac{1}{M}\right)^2}{q_i^4\left[q_i^2-\frac{4}{M^2}k_0^2-4i\tilde{v}\frac{4}{M^2}\right]}$	$\frac{1}{v^5}$
Члены третьего порядка	—	$\frac{1}{v^7}$	—	—	—	$\frac{\ln v}{v^6}$

причем доминирующим является член первого порядка V_{pp}, который убывает, как $\frac{1}{v^2}$ и не компенсируется членами второго порядка, дающими в этой области меньший вклад. Дифференциальное сечение в области $\theta \approx \pi$ убывает, как $\frac{1}{v^4}$ и имеет резкий максимум при $\theta = \pi$:

$$\frac{dQ_{if}}{d\Omega} = \frac{2^{12}}{M^2}\left(\frac{v_0}{v}\right)^{12} \frac{1}{\left[1+\cos\theta+8\left(\frac{v_0}{v}\right)^2\right]^4} r_0^2. \tag{33}$$

Область $\theta \approx \pi$ дает вклад в полное сечение

$$Q_{\theta=\pi} = \frac{16}{3M^2}\left(\frac{v_0}{v}\right)^6 \pi r_0^2. \tag{34}$$

Наконец, в области малых углов $\left(\widetilde{q}_i^2 \approx \frac{4}{M^2}\right)$ доминирующим при $v \to 0$ является вклад от члена $V_{pe}G_0V_{pe}$, который убывает, как $\frac{1}{v^5}$, так что в этой области дифференциальное сечение определяется выражением

$$\frac{dQ_{if}}{d\Omega} = \frac{2^{10}}{M^2}\left(\frac{v_0}{v}\right)^{12} \frac{1}{\left[\left(\widetilde{q}_i^2 - \frac{4}{M^2}\right)^2 + \left(16\frac{\widetilde{v}}{M^2}\right)^2\right]} r_0^2 \tag{35}$$

и вклад в полное сечение от области углов $\theta \approx \frac{\sqrt{3}}{M}$ пропорционален $\frac{1}{v^{11}}$:

$$Q_{\theta=\frac{\sqrt{3}}{M}} = 2^6\pi\left(\frac{v_0}{v}\right)^{11} \pi r_0^2. \tag{36}$$

Фактически, при не слишком больших v в области малых углов $\theta \approx 0$ следует учитывать также вклад от члена V_{pe}, который хотя и убывает, как $\frac{1}{v^6}$, однако при $\theta \approx 0$ принимает достаточно большие значения: $\sim M^6$. Учет членов $V_{pe} + V_{pe}G_0V_{pe}$ в области малых углов приводит к вкладу в полное сечение

$$Q_{\theta \simeq 0} = \left[0{,}295 + \frac{5\pi}{2^{12}}\frac{v}{v_0}\right]\frac{2^{18}}{5}\left(\frac{v_0}{v}\right)^{12} \pi r_0^2. \tag{37}$$

Приведенные в § 2 оценки членов третьего порядка показывают, что при $\widetilde{v} \to 0$ члены этого порядка дают меньший вклад в амплитуду и сечение, чем члены первого и второго порядков.

Таким образом, основной вклад в полное сечение при $\widetilde{v} \to 0$ дает область $\theta \approx \pi$. Физически эта область соответствует процессу рассеяния, при котором налетающий протон выбивает протон из атома водорода и занимает его место, образуя новое связанное состояние. Сечение этого процесса убывает, как $\frac{1}{v^6}$. Область $\theta \approx \pi$ в первом порядке была рассмотрена Маплтоном [2], однако ввиду возникавшей в ряде расчетов [3], [4] тождественной компенсации протон-протонного члена первого порядка V_{pp} частью членов второго порядка $V_{pp}G_0V_{pe} + V_{pe}G_0V_{pp}$ в общей области углов, а также из-за того, что до настоящего времени не было известно поведение указанных выше членов второго порядка в области $\theta \approx \pi$, роль вклада от этой области не была ясна.

Вне области $\theta \approx \pi$ доминирующий вклад в сечение дает область $\theta \approx \frac{\sqrt{3}}{M}$ при $\tilde{v} \to 0$. Эта область соответствует классически доступному рассеянию электрона (находящегося в связанном состоянии) на налетающем протоне с последующим рассеянием на покоящемся (в лабораторной системе) протоне и образованием нового связанного состояния с налетавшим протоном. Сечение такого процесса пропорционально $\frac{1}{v^{11}}$.

Выражение для вклада от области малых углов согласуется с результатами, приведенными в [5]. Непосредственно убедиться в том, что $T_{12} \approx V_{pe} G_0 V_{pe}$ действительно соответствует указанному выше процессу, можно, учитывая законы сохранения энергии и импульса при каждом столкновении, а также наложив добавочное условие равенства конечных скоростей налетавшего протона и дважды рассеянного электрона. Пусть $\vec{k}_i$ — импульс налетающего протона 1, $\vec{k}$ — конечный импульс протона 1, $\vec{q}_3$ — импульс электрона после первого рассеяния на протоне 1, $\vec{q}'_3$ — импульс электрона после второго рассеяния на протоне 2, $\vec{q}_2$ — конечный импульс протона 2. Тогда из законов сохранения и указанного выше добавочного условия следует:

$$
\begin{gathered}
\vec{k}_i - \frac{m_e}{m_e + m_p} \vec{k}_i = \vec{k} + \vec{q}_3, \\
\frac{k_i^2}{2m_p} + \left(\frac{m_e}{m_e + m_p}\right)^2 \frac{k_i^2}{2m_e} = \frac{k^2}{2m_p} + \frac{q_3^2}{2m_e}, \\
\vec{q}_3 - \frac{m_p}{m_p + m_e} \vec{k}_i = \vec{q}\,'_3 + \vec{q}_2, \\
\frac{q_3^2}{2m_e} + \left(\frac{m_p}{m_p + m_e}\right)^2 \frac{k_i^2}{2m_p} = \frac{q_3'^2}{2m_e} + \frac{q_2^2}{2m_p}, \\
\frac{\vec{k}}{m_p} = \frac{\vec{q}\,'_3}{m_e}.
\end{gathered}
\tag{38}
$$

Решая эти уравнения относительно $\vec{k}$, находим, что $\vec{k} = \frac{m_p}{m_p + m_e} k_i \vec{u}_f$, где $\vec{u}_f$ — неизвестный единичный вектор, направленный по $\vec{k}$ и удовлетворяющий уравнению

$$
\left(\frac{m_p}{m_p + m_e} \vec{u}_f - \vec{u}_i\right)^2 = \frac{(2M + 1)^2}{M^2 (1 + M)^2}, \tag{39}
$$

где

$$
\vec{k}_i = |k_i| u_i.
$$

Сравнивая последнее равенство с выражением для T_{12}, находим, что углы, при которых $|T_{12}|$ достигает максимального значения, удовлетворяют уравнению (39).

Таким образом, учет ведущих вкладов от областей $\theta \approx \pi$, $\theta \approx 0$ приводит к окончательному асимптотическому выражению для сечения

$$
Q_{if} = \left[\frac{5}{12 \cdot 2^6} \cdot \frac{1}{M^2} \left(\frac{v}{v_0}\right)^6 + \frac{5\pi}{2^{12}} \frac{v}{v_0} + 0{,}295\right] Q_{BK}. \tag{40}
$$

При $\widetilde{v} \to 0$ доминирующим является вклад в сечение, полученный в первом борновском приближении. Однако при не слишком больших скоростях v, где можно пренебречь релятивистскими эффектами, вклад этот относительно невелик из-за наличия весьма малого множителя порядка $\frac{1}{M^2}$. Тем не менее существует область энергий, где необходим учет вклада в сечение, полученного в первом борновском приближении и где справедлив наш нерелятивистский расчет. Действительно, оценки выражения (40) показывают, что это вклад становится существенным, начиная с энергии 3 *Мэв*, давая при 10 *Мэв* уже 30% вклада в полное сечение, в то время как на долю релятивистских поправок при 10 *Мэв* приходится менее 3% вклада, согласно оценкам, приведенным в [6]. Таким образом, существует область энергий, где имеется возможность непосредственно сравнивать результаты расчета с экспериментом, связанным с измерением как полного, так и дифференциального сечений. Причем дифференциальное сечение наряду с максимумом при малых углах рассеяния при достаточно высоких энергиях должно иметь максимум также при $\theta = \pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Потапов В. С., Бродский А. М., Толмачев В. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 52, 1969.
2. Mapleton R. A. Proc. Phys. Soc., **83**, 895, 1964.
3. Drisko R. M. Thesis, Carnegie Institute of Technology, 1955.
4. Mapleton R. A. Proc. Phys. Soc., **91**, 868, 1967.
5. Bransden B. H. «Advances in Atomic and Molecular Physics», v. I. pp. 85—149, Academic Press, N. Y.— L., 1965.
6. Mittleman M. H. Proc. Phys. Soc., **84**, 453, 1964.

Поступила в редакцию
28.8 1968 г.

Кафедра
химической механики мехмата