Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1969

УДК 534.222

О. В. РУДЕНКО, С. И. СОЛУЯН, Р. В. ХОХЛОВ

К ТЕОРИИ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

На основе приближенных уравнений гидродинамики, приведенных к сопровождающей системе координат, рассмотрено распространение достаточно сильных волн конечной амплитуды с сохранением в уравнениях малых членов третьего порядка малости. Полученные решения позволили аналитически установить несимметрию в искажении волн и наличие постоянного течения в направлении распространения волны при одновременном учете нелинейных и диссипативных эффектов.

Всестороннее изучение акустических волн конечной амплитуды на основе уравнений второго приближения позволило установить такие эффекты, как возникновение, нарастание и спад гармоник, возникновение квазиударных фронтов и их «рассасывание». Были определены профили различных волн конечной амплитуды, изменяющиеся по мере распространения возмущений в системе. При этом изучались и обычные гидродинамические среды, и среды с релаксацией, и твердые тела. Все эти и другие вопросы изложены в монографии Л. К. Зарембо и В. А. Красильникова [1]. Следует отметить хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов в рамках «второго приближения».

В предлагаемой работе рассмотрено распространение волн конечной амплитуды с учетом эффектов третьего порядка малости. Такое рассмотрение позволяет установить факт несимметричного искажения волн и наличие постоянного течения в направлении распространения волны.

Полная система уравнений, описывающих распространение волн конечной амплитуды в вязкой, теплопроводящей среде, состоит из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \tag{1}$$

уравнения движения

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \sigma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2}$$

и приближенного уравнения состояния

$$P = P_0 + c_0^2\rho' + \frac{(\gamma - 1)\, c_0^2}{2\rho_0}\rho'^2 + \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)\, c_0^2}{6\rho_0^2}\rho'^3. \tag{3}$$

Здесь v — скорость волны, $\rho' = \rho - \rho_0$ — отклонение плоскости от равновесного значения ρ_0, P — давление, $c_0 = (\gamma P_0/\rho_0)^{1/2}$ — скорость звука, $\sigma = \frac{4}{3}\eta + \zeta + \varkappa\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right)$ — диссипативный коэффициент, учитывающий сдвиговую и объемную вязкость η и ζ, теплопроводность $\varkappa$, C_V и C_P — удельные теплоемкости при постоянных объеме и давлении. Коэффициент $\gamma = C_P/C_V$ для газов и $\gamma = 1 + \left(\frac{\partial c^2}{\partial \rho}\right)\frac{\rho_0}{c_0^2}$ для жидкостей.

Принимая, как обычно, диссипативный коэффициент σ, а также возмущения скорости, плотности и давления за малые величины первого порядка малости, ограничимся рассмотрением эффектов, имеющих место при больших числах Рейнольдса. В предположении медленного изменения профиля волны при ее распространении в системе введем сопровождающую систему координат $\tau = t - \frac{x}{c_0}$ и $z = \mu x$, где μ — малый параметр первого порядка малости, учитывающий факт медленного искажения. Переходя к координатам τ, z после исключения P из уравнения (2) с помощью уравнения (3), получим с точностью до членов $\sim \mu^3$

$$\frac{1}{\rho_0}\left(1 - \frac{v}{c_0}\right)\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} + \frac{v}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial z} - \frac{1}{c_0}\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{\partial v}{\partial \tau} + \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)\left(1 - \frac{v}{c_0}\right)\frac{\partial v}{\partial \tau} + v\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\sigma}{c_0^2\rho_0}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{2\sigma}{c_0\rho_0}\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \tau} \quad (5)$$

$$+ \frac{c_0}{\rho_0}\left[1 + (\gamma - 1)\frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2\right]\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} -$$

$$- \frac{c_0^2}{\rho_0}\left[1 + (\gamma - 1)\frac{\rho'}{\rho_0}\right]\frac{\partial \rho'}{\partial z}.$$

Умножив уравнение (4) на $c_0\left(1 - \frac{v}{c_0}\right)$, после сложения полученного уравнения с уравнением (5) и замены в малых членах второго порядка малости v на ρ' на основе самосогласованных выражений, полученных в работе [2] $\frac{v}{c_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{\gamma - 3}{4}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 + \frac{\sigma}{2c_0^2\rho_0^2}\frac{\partial \rho'}{\partial \tau}$, найдем

$$\left[1 + \frac{3\gamma - 1}{4}\frac{\rho'}{\rho_0}\right]\frac{\partial \rho'}{\partial z} + \left[-\frac{\gamma + 1}{2c_0}\frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{(\gamma+1)(\gamma-3)}{4c_0}\left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2\right]\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} =$$

$$= \frac{\sigma}{2c_0^3\rho_0}\left[1 + \frac{\gamma - 3}{2}\frac{\rho'}{\rho_0}\right]\frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2} - \frac{5\sigma}{4c_0^2\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'}{\partial z \partial \tau} + \frac{(\gamma - 1)\sigma}{4c_0^3\rho_0^2}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial \tau}\right)^2. \quad (6)$$

Аналогичные преобразования приводят ко второму уравнению

$$\left[1 + \frac{\gamma + 5}{4}\frac{v}{c_0}\right]\frac{\partial v}{\partial z} + \left[-\frac{\gamma + 1}{2c_0}\frac{v}{c_0} + \frac{(\gamma+1)(\gamma-3)}{8c_0}\left(\frac{v}{c_0}\right)^2\right]\frac{\partial v}{\partial \tau} =$$

$$= \frac{\sigma}{2c_0^3\rho_0}\left[1 - \frac{\gamma + 1}{2}\frac{v}{c_0}\right]\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} - \frac{3\sigma}{4c_0^2\rho_0}\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \tau} - \frac{\sigma(\gamma - 1)}{4c_0^4\rho_0}\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2. \quad (7)$$

Полезно провести сравнение уравнений (6) и (7) с уравнением (26) работы [2]. В пренебрежении малыми членами третьего порядка малости эти уравнения оказываются одинаковыми и совпадают с уравнением

(26). Отличие в уравнениях, описывающих медленные изменения профилей скорости и плотности звуковой волны, сказывается только в третьем приближении, когда волны перестают быть простыми. Сведение уравнений (6) и (7) к одинаковому виду на основе самосогласованных выражений следующего приближения невозможно. Это связано с тем, что в третьем приближении формы волн скорости и плотности уже различаются.

Точное решение уравнения (6), точно так же, как и уравнения (7), не может быть получено аналитически, поэтому проведем поэтапное рассмотрение процесса, предполагая, что на входе системы задано краевое условие: при $z=0$ $\rho'=\rho_0'\sin\omega\tau$. Тогда, как это принято в случае больших чисел Рейнольдса [3], на первом этапе распространения волны конечной амплитуды можно пренебречь диссипативными эффектами, опустив члены, стоящие справа в уравнении (6). Получающиеся таким способом уравнения в методе поэтапного упрощения принято называть упрощенными. Решение упрощенного уравнения с точностью до малых величин третьего порядка малости имеет вид

$$\omega\tau=\arcsin\frac{\rho'}{\rho_0'}-\frac{\gamma+1}{2c_0\rho_0}\,\omega z\rho_0'\left(\frac{\rho'}{\rho_0'}\right)+\frac{(\gamma+1)(\gamma+5)}{8c_0\rho_0^2}\,\omega z\rho_0'^2\left(\frac{\rho'}{\rho_0'}\right)^2. \tag{8}$$

Решение (8), анализ которого удобнее всего провести графически, уже указывает на несимметричный характер искажения профиля волны. Отложим, как показано на рисунке 1, *а*, по оси абсцисс значение ρ'/ρ_0', а по оси ординат значение $\omega\tau$. Как видим, волновой профиль, в соответствии с формулой (8), представляет собой сумму трех функций: арксинуса, прямой и параболы. При этом тангенс угла наклона прямой увеличивается по мере распространения волны от источника, и это возрастание пропорционально z и амплитудному значению плотности волны на входе системы. Аналогичную зависимость по z обнаруживает и парабола с той лишь разницей, что здесь эффекты сказываются в следующем порядке малости — пропорциональности квадрату амплитуды волны на входе системы. На рис. 1, *б* представлена сумма всех трех функций, дающих профиль волны на некотором расстоянии z от входа системы. Этот профиль сформирован из первоначально синусоидальной волны и может быть построен на любом удалении от источника вплоть до точки формирования разрыва, когда функция становится многозначной.

На основе метода поэтапного упрощения эта вторая область распространения волны может быть исследована с помощью вспомогательной задачи о распространении одиночного стационарного скачка плотности в среде, т. е. мы ограничиваемся исследованием стационарного решения уравнения (6), когда производной по z можно пренебречь.

Упрощенное уравнение имеет вид

$$-\frac{\gamma+1}{2c_0}\frac{\rho'}{\rho_0}\frac{d\rho'}{d\tau}-\frac{\sigma}{2c_0^3\rho_0}\frac{d^2\rho'}{d\tau^2}=\frac{\gamma-1}{4}\frac{\sigma}{c_0^3\rho_0^2}\left(\frac{d\rho'}{d\tau}\right)^2. \tag{9}$$

В отличие от аналогичного уравнения второго приближения (2), правая часть уравнения (9) не равна нулю. Решение последнего существует лишь при условии несимметричного скачка, и эта несимметрия сказывается в следующем порядке малости, т. е.

$$\rho'=\rho_0' \text{ при } \tau\to+\infty,\quad \rho'=-\rho_0'+\Delta \text{ при } \tau\to-\infty,$$

где

$$\Delta\simeq-\frac{\gamma-1}{3}\rho_0\left(\frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)^2. \tag{10}$$

На рисунке 2 построен профиль одиночного скачка плотности на основе аналитического решения уравнения (9). Приведенный скачок плотности — квазистационарный фронт волны — распространяется без искажения со скоростью c_0, что при наличии несимметрии эквивалентно появлению постоянного течения в направлении распространения волны.

Действительно, вводя вместо $\tau = t - \frac{x}{c_0}$ новую сопровождающую координату $\tau' = t - \frac{x}{c_0 + \delta c_0}$, где коэффициент δ характеризует приращение скорости распространения волны, можно получить вместо (9) уравнение следующего вида:

$$-\frac{\gamma+1}{2c_0}\frac{\rho'}{\rho_0}\frac{d\rho'}{d\tau'} - \frac{\sigma}{2c_0^3\rho_0}\frac{d^2\rho'}{d\tau'^2} = \frac{\gamma-1}{4}\frac{\sigma}{c_0^3\rho_0^2}\left(\frac{d\rho'}{d\tau'}\right)^2 - \frac{\delta}{c_0}\frac{d\rho'}{d\tau'}. \tag{11}$$

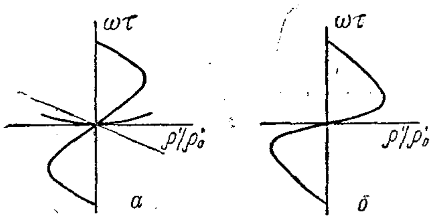

Рис. 1

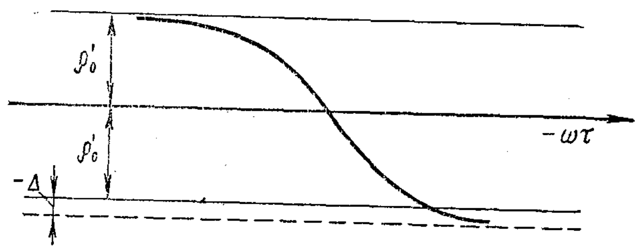

Рис. 2

Уравнение (11) по сравнению с уравнением (9) содержит дополнительный член, позволяющий найти решение, удовлетворяющее симметричному профилю волны. Такое решение возможно при значении коэффициента

$$\delta = \frac{\gamma^2 - 1}{12}\left(\frac{\rho_0'}{\rho_0}\right)^2. \tag{12}$$

Следовательно, достаточно интенсивный симметричный одиночный стационарный скачок распространяется со скоростью, превышающей скорость звука, и это приращение скорости пропорционально квадрату акустического числа Маха. Качественная оценка изменения скорости распространения фронта волны проводилась Г. А. Остроумовым [4] формула (1.5.7). Однако при вычислении скорости фронта в работе [4] использовались соотношения, справедливые для простых волн. Квадратичные поправки в формуле (1.5.7) определены благодаря учету малых членов третьего порядка малости по числу Маха. Естественно, формула (12) не согласуется с формулой (1.5.7), поскольку в последней не учтены отраженные от поверхностей разрыва волны, сказывающиеся именно в третьем порядке малости.

Используя ранее найденное значение амплитуды отраженной волны формула (24) работы [5], дополним в третьем приближении римановские соотношения для простой волны:

$$\frac{\rho_2'}{\rho_0} = M_0 - \frac{(\gamma+1)^2}{24}M_0^3,$$

$$\frac{v_2}{c_0} = M_0\left[1 + \frac{\gamma-3}{4}M_0 + \frac{(\gamma-3)(\gamma-5)}{24}M_0^2\right] + \frac{(\gamma+1)^2}{24}M_0^3, \tag{13}$$

$$\frac{\rho_1'}{\rho_0} = -M_0, \quad \frac{v_1}{c_0} = -M_0\left[1 - \frac{\gamma-3}{4}M_0 + \frac{(\gamma-3)(\gamma-5)}{24}M_0^2\right].$$

Здесь $M_0 = \rho_0'/\rho_0$, индексом 1 помечены величины, относящиеся к точке, находящейся непосредственно перед фронтом волны, а индексом 2 — к точке непосредственно за фронтом. Поэтому отраженная от поверхности разрыва волна включена в первые два из приведенных выше соотношений.

Определяя скорость фронта с помощью разложений (13), найдем

$$u_ф = \frac{\rho_0 (v_2 - v_1) + \rho_2' v_2 - \rho_1' v_1}{\rho_2' - \rho_1'} = c_0 \left[1 + \frac{\gamma^2 - 1}{12} \left(\frac{\rho_0'}{\rho_0} \right)^2 \right]. \qquad (14)$$

Таким образом, приращение скорости фронта оказалось численно равным значению δ формула (12), несмотря на принципиально различный подход. Следует отметить, что квазистационарное решение, дающее структуру фронта (эта формула не приведена в статье), остается справедливым и для предельного перехода $\sigma \to 0$, однако такой предельный переход в исходных уравнениях (6), (7) неправомерен, поскольку приводит к неоднозначным результатам. Действительно, полагая, например, $\sigma \sim \mu^2$, при переходе к упрощенному уравнению можно все члены уравнений (6), (7) умножить на выражение вида $1 + A \frac{v}{c_0}$, где A — константа. При этом изменится нелинейная часть упрощенного уравнения, тогда как диссипативная часть останется без изменений. Эта неоднозначность устраняется как раз благодаря удержанию малых членов третьего порядка малости по диссипации.

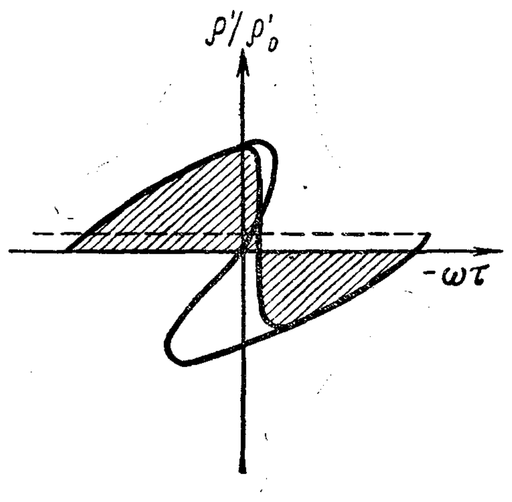

Рис. 3

В работе [5] были найдены соотношения, связывающие значения гидродинамической скорости v и возмущения плотности ρ' в ступенькообразной симметричной ударной волне (1), (2). Эти соотношения неявным образом учитывают наличие отраженной волны. Подставляя соотношение (1) в выражение для скорости фронта, после несложных преобразований приходим к результату, точно совпадающему с формулой (14).

Итак, при вычислении постоянной составляющей скорости оба метода дают совпадающие результаты и полностью согласуются с тем амплитудным значением отраженной волны, которое по результатам работы [5] явно учтено в разложениях (13). Приращение скорости представляет собой акустический ветер, имеющий место при распространении одиночного стационарного скачка и являющийся следствием нелинейного самовоздействия волны.

Возвращаясь к волне синусоидального профиля, можно было бы все разрывные участки волны заменить гладкой функцией, представленной на рис. 2. Однако, в отличие от задачи второго приближения, когда положение фронта однозначно определяется по равенству площадей, в настоящей работе такое построение неправомерно. Равенство площадей не выполняется, и в соответствии с квазистационарным решением фронт волны оказывается смещенным. Синусоидальная волна во второй области распространения может быть качественно представлена так, как это показано на рис. 3. Такое построение проведено на основе «сшивания» решений для первой и второй областей распространения волны. Пунктирной линией отмечена постоянная составляющая плотности. Это постоянное течение, существующее в области распространения волны, естественно, затухает по мере ослабления звуковых возмущений, когда эффекты третьего порядка малости пренебрежимо малы. Волновые профили становятся симметричными, и при последующем рассасывании фронтов волна вновь превращается в синусоидальную на расстоянии, не зависящем от амплитуды сигнала на входе системы [2].

Постоянное течение, найденное во вспомогательной задаче для одиночного стационарного скачка и не зависящее от z при переходе к периодическим возмущениям, обращается в нуль на конечнем расстоянии от излучателя. Это расстояние определяется диссипативными свойствами среды. Число фронтов, участвующих в формировании отраженных волн, $n \simeq Re/M$. Процесс формирования течения рассматривался в работе [5]. С учетом диссипативных свойств среды интеграл в формуле (26) работы [5] берется в конечных пределах, и скорость постоянного течения обращается в нуль при значении безразмерной координаты $z \cong Re$.

Таким образом, учет малых членов третьего порядка малости в исходных уравнениях позволил установить несимметрию в искажении волн и получить постоянное течение, звуковой ветер для значений числа $Re \gg 1$. В рамках одномерной задачи излучатель следует считать абсолютно проницаемым для отраженных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику. М., «Наука», 1966.
2. Солуян С. И., Хохлов Р. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 52—61, 1961.
3. Khokhlov R. V., Soluyan S. I. Acustica, **14**, 242—247, 1964.
4. Остроумов Г. А. Основы нелинейной акустики. Изд-во Ленинград. ун-та, 1967.
5. Руденко О. В., Солуян С. И., Хохлов Р. В. «Акустический журнал», № 3, 414—420, 1969 г.

Поступила в редакцию
12.11 1968 г.

Кафедра
волновых процессов