

Е. С. ПОЛИЩУК

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПРИБЛИЖЕННЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ И КИБЕРНЕТИЧЕСКИМ МОДЕЛИРОВАНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Вводится понятие кибернетического моделирования. Рассматриваются условия, при которых полученная экспериментально приближенная кибернетическая модель является в то же время приближенной в смысле некоторого заданного критерия математической моделью объекта. Для этих условий выведены алгоритмы настройки кибернетической модели Винера.

В настоящее время моделирование успешно применяется к решению задач двух основных разделов теории систем: задач анализа и синтеза. Однако методы моделирования и аналитические методы решения таких задач для каждого из этих типов различны.

Задача анализа состоит в изучении поведения объекта, математическое описание которого известно. Исходя из этого описания, мы строим модель — объект иной физической природы, эквивалентный в математическом отношении моделируемому. Процессы в модели удобны для лабораторного исследования, и ее поведение изучается экспериментально. Такое моделирование называется математическим.

В задаче синтеза (идентификации) напротив необходимо определить математическое описание объекта, поведение которого известно (т. е. известны реакции на известные входные воздействия). Для решения этой задачи строится модель, обладающая таким же поведением, что и объект. Такое моделирование поведения объекта, рассматриваемого как «черный ящик», характерно для кибернетики и в дальнейшем будет называться кибернетическим, а модель поведения — кибернетической моделью объекта.

Постановка задачи

Пусть на некотором интервале времени задано входное воздействие $x(t)$, одинаковое для линейных модели и объекта, и пусть $y_m(t)$ и $y_0(t)$ — их отклики (поведение). Будем считать, что в начальный момент времени модель и объект имеют одинаковые (для простоты нулевые) начальные условия. Тогда, если модель является точной математической моделью объекта:

$$y_m(t) \equiv y_0(t), \quad (1)$$

она является также и точной кибернетической моделью. Обратное утверждение справедливо только в том случае, когда $x(t)$ есть сигнал достаточно сложной формы. В качестве такого входного воздействия возьмем стационарный случайный сигнал; для него указанное свойство доказывается строго (см. приложение 1).

На практике мы всегда имеем приближенные модели. В качестве критерия отклонения приближенной кибернетической модели от точной можно взять любой критерий Φ близости между $y_m(t)$ и $y_0(t)$, обладающий свойством:

$$\min_{y_m(t)} \Phi[y_0(t), y_m(t)] = \Phi[y_0(t), y_0(t)] = 0. \quad (2)$$

Аналогично введем критерий F отклонения приближенной математической модели от точной. В качестве F можно взять любой критерий близости между $f_m(t)$ и $f_0(t)$ — функциями времени, полностью характеризующими линейный объект (импульсный отклик, переходная функция и т. д.). Выбор F зависит от цели моделирования, т. е. от того, как предполагается использовать модель.

При решении задачи идентификации методом кибернетического моделирования мы ищем модель, минимизирующую Φ в некотором заданном классе моделей, т. е. строим приближенную кибернетическую модель. Нам же необходимо получить приближенную математическую модель объекта, т. е. минимизировать критерий F . Задача ставится следующим образом: выберем Φ (и, вообще говоря, $x(t)$) так, чтобы минимизация Φ приводила и к минимизации F , т. е. чтобы приближенная кибернетическая модель была в то же время и приближенной математической моделью объекта в заданном критерием F смысле.

Критерий Φ будем в дальнейшем называть критерием настройки (модели под объект), а критерий F — критерием идентификации. Рассмотрим два вида F .

Моделирование импульсной функции объекта

Пусть критерий идентификации F имеет вид

$$F = \int_0^{\infty} [g_0(t) - g_m(t)]^2 dt, \quad (3)$$

где $g_0(t)$ и $g_m(t)$ — импульсные функции объекта и модели. Такой критерий можно взять в следующих случаях: если на модели предполагается изучать или прогнозировать поведение объекта при достаточно широкомполосных воздействиях на него и если модель входит в самонастраивающуюся систему автоматического управления объектом, в которой оптимальное управление отыскивается вычислительным устройством с учетом снимаемой с модели информации об импульсной функции объекта.

Если имеется возможность выбирать сигнал на входе объекта, можно взять в качестве $x(t)$ белый шум и положить

$$\Phi = \overline{[y_0(t) - y_m(t)]^2}. \quad (4)$$

Тогда при достаточном времени усреднения $\Phi \sim F$.

Пусть $x(t)$ — произвольный стационарный случайный сигнал. Будем считать, что он получен пропусканием белого шума ξ через формирующее звено с коэффициентом передачи $H(p)$. Тогда, используя

свойство коммутативности стационарных линейных систем, получим следующий критерий настройки Φ , соответствующий (3) (см. рис. 1):

$$\Phi = \overline{[\hat{y}_0(t) - \hat{y}_m(t)]^2}. \quad (5)$$

На практической реализации этого критерия остановимся дальше.

Моделирование переходной функции объекта

Пусть критерий идентификации F имеет вид

$$F = \int_0^{\infty} [f_0(t) - f_m(t)]^2 dt, \quad (6)$$

где $f_0(t)$ и $f_m(t)$ — переходные функции объекта и модели. Такой критерий удобен в том случае, когда моделируется линейная часть нелинейного объекта, и на модели предполагается изучение процесса перехода из одного статического режима объекта в другой при скачкообразных управляющих воздействиях.

Этому критерию соответствует критерий настройки (4), если входной сигнал $x(t)$ является процессом с независимыми приращениями (см. приложение 2).

Если же $x(t)$ — сигнал, полученный пропусканием белого шума через формирующее звено $H(p)$, то критерию (6) будет соответствовать следующий критерий (см. рис. 1):

$$\Phi = \overline{[\tilde{y}_0(t) - \tilde{y}_m(t)]^2}. \quad (7)$$

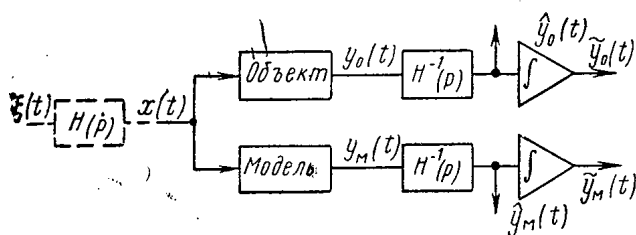


Рис. 1

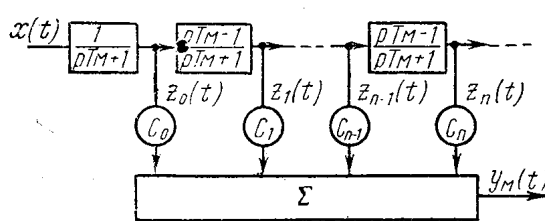


Рис. 2

Алгоритм настройки модели Винера по критерию (3)

Типичным примером кибернетического моделирования является моделирование методом Винера [1]. При определении параметров c_n линейной модели Винера (рис. 2), на вход которой, как и на вход объекта, подан белый шум, используется критерий настройки (4), что соответствует критерию идентификации (3). Из-за некоррелированности $z_n(t)$ минимизация (4) приводит к следующему алгоритму для нахождения c_n :

$$c_n = \frac{\overline{z_n y_0}}{\overline{z_n^2}}. \quad (8)$$

В работе [2] исследовался алгоритм нахождения c_n в случае небелого шума на входе модели и объекта, при этом использовался тот же критерий настройки (2). Определенные таким образом параметры c_n не дают минимума критерию идентификации (3).

Воспользуемся критерием настройки (5). Пусть (см. рис. 1) $H(p) = 1/(1+pT_x)$, тогда $H^{-1}(p) = 1+pT_x$. Это физически неосуществимая операция. Можно обойти эту трудность, заменив звено $H^{-1}(p)$ физически осуществимой системой, частотная характеристика которой близка к $H^{-1}(p)$ в полосе пропускания объекта и модели. Мы рассмотрим ниже другой способ.

Поменяем местами модель и звено $H^{-1}(p)$; ясно, что это не изменит \hat{y}_m . Теперь на вход модели поступает белый шум, поэтому промежуточные выходы модели z_n будут некоррелированными. При этом не возникает необходимости синтезировать звено $H^{-1}(p)$, так как его можно объединить с первым звеном модели. Результирующее звено имеет характеристику

$$H = \frac{1+T_x}{1+pT_m} \quad (9)$$

и хорошо реализуется, если T_x не слишком велика по сравнению с T_m .

Таким образом, запишем

$$\hat{y}_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_n(t), \quad \hat{y}_0(t) = \int_0^{\infty} h^{-1}(\tau) y_0(t-\tau) d\tau, \quad (10)$$

где $h^{-1}(t)$ — импульсная функция, соответствующая $H^{-1}(p)$. В нашем случае

$$h^{-1}(t) = \delta(t) + T_x \delta'(t). \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (5) и приравнявая нулю производную Φ по c_n , получим следующий алгоритм для нахождения c_n :

$$c_n = \frac{\overline{z_n y_0} - T_x R'_{z_n y_0}(0)}{\overline{z_n^2}}, \quad (8')$$

где $R_{z_n y_0}(t)$ — взаимнокорреляционная функция между n -ным выходом модели и выходом объекта. Отличие найденного алгоритма от (8) заключается в поправочном члене в числителе (8'). При аналого-цифровом способе реализации алгоритма (8') [2] этот поправочный член удобно вычислять, используя равенство

$$R'_{z_n y_0}(0) = R_{z_n y_0}'(0),$$

способом, указанным в работе [3].

Алгоритм настройки модели Винера по критерию (6)

Мы видели, что для моделирования переходной функции объекта следует в качестве входного сигнала взять процесс с независимыми приращениями. Практически достаточно взять стационарный шум с корреляционной функцией

$$K_x(t) = \sigma_x^2 e^{-\frac{|t|}{T_x}}, \quad (12)$$

где T_x велико по сравнению с постоянной времени объекта и модели. Алгоритмы минимизации среднеквадратичного рассогласования между

y_0 и y_m при входном сигнале (12) были подробно рассмотрены в работе [2].

Пример. Пусть импульсная и переходная функции объекта имеют вид

$$g_0(t) = \frac{1}{T_0} e^{-\frac{t}{T_0}}, \quad f_0(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T_0}},$$

и модель Винера имеет два звена. Тогда минимизация среднеквадратичной ошибки между y_0 и y_m приводит к следующим уравнениям для определения c_0 и c_1 [2]:

$$\begin{cases} \overline{c_0 z_0^2} + \overline{c_1 z_0 z_1} = \overline{y_0 z_0}, \\ \overline{c_0 z_0 z_1} + \overline{c_1 z_1^2} = \overline{y_0 z_1}. \end{cases}$$

Отсюда найдем коэффициенты c_0 и c_1 , используя при вычислении средних (12). Эти коэффициенты зависят от T_x . Переходя к пределу при $T_x \rightarrow \infty$, получим окончательно для c_0 и c_1 :

$$c_0 = \frac{3(\alpha + 1)^2 - 4}{2(\alpha + 1)^2}, \quad c_1 = \frac{(\alpha + 1)^2 - 4}{2(\alpha + 1)^2},$$

где $\alpha = T_m/T_0$. Переходная функция модели с этими параметрами минимизирует критерий идентификации (6) для двухзвенной модели Винера.

Вычисление параметров модели, минимизирующих критерий идентификации (3), дает другие значения:

$$\hat{c}_0 = \frac{2\alpha}{\alpha + 1}, \quad \hat{c}_1 = \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{(\alpha + 1)^2}. \quad (13)$$

Ясно, что вторая модель (с параметрами (12)) с большей ошибкой воспроизводит реакцию объекта на скачкообразное изменение входного сигнала по сравнению с первой. Отметим, что эта ошибка может быть весьма велика, особенно для $\alpha > 1$. Так, при $\alpha = 2$: $E_1 \approx 2,5\%$, $E_2 = 22,2\%$, где относительная ошибка $E_{1,2}$ имеет вид

$$E_{1,2} = \frac{\int_0^{\infty} (f_0 - f_{m1,2})^2 dt}{\int_0^{\infty} (1 - f_0)^2 dt}.$$

Таким образом, для приближенного моделирования объекта (использование малого числа звеньев модели Винера) особенно важно правильно определить цель моделирования и в соответствии с ней выбрать критерий идентификации и критерий настройки.

Предлагаемое различие математического и кибернетического моделирования представляется полезным. Условия, при которых приближенная кибернетическая модель является в то же время и приближенной математической моделью, могут быть выведены теоретически и реализованы экспериментально.

Приложение 1. Пусть $x(t)$ — стационарный случайный сигнал с корреляционной функцией $K_x(t)$. Тогда равенству (1) эквивалентно следующее:

$$\overline{[y_m(t) - y_0(t)]^2} = 0. \quad (14)$$

Мы рассматриваем линейные системы, поэтому y_0 и y_m можно записать через интегралы свертки. Меняя местами операции интегрирования и усреднения, получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K_x(t-t') [g_0(t) - g_m(t)] [g_0(t') - g_m(t')] dt dt' = 0. \quad (15)$$

Обозначим выражения в квадратных скобках (15) через $G(t)$ и $G(t')$. Переходя к частотному представлению, вместо (15) получим

$$\int_0^\infty S_x(\omega) |G(i\omega)|^2 d\omega = 0, \quad (16)$$

где S_x — спектр сигнала $x(t)$. Так как S_x всегда больше нуля, то $G(i\omega)$ и $G(t)$ тождественно равны нулю, т. е. $g_0(t) \equiv g_m(t)$. Импульсные функции полностью характеризуют линейную систему, следовательно, мы имеем точную математическую модель объекта при выполнении (14).

Приложение 2. Обозначим $f_0(t) - f_m(t) = P(t)$, $g_0(t) - g_m(t) = G(t)$, тогда $G(t) = dP/dt$.

Аналогично (15) получим для случайного входного сигнала с независимыми приращениями

$$\overline{(y_m - y_0)^2} = \int_0^\infty \int_0^\infty K_x(t, t') dP(t) dP(t'), \quad (17)$$

где $K_x(t, t')$, как известно, имеет следующий вид:

$$K_x(t, t') = \min\{t, t'\}. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17) и дважды интегрируя по частям, получаем

$$\overline{(y_m - y_0)^2} = \int_0^\infty P^2(t) dt.$$

Эквивалентность (6) и (4) для этого случая доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. М., ИЛ, 1961.
2. Полищук Е. С., Штаф К. В. Сб. «Автоматизация химических производств», вып. 4, 1968.
3. Юшин В. И. Стильтьесов коррелятор сигнала и производной. «Сб. трудов Ленинградского механического ин-та», № 62, 1967.

Поступила в редакцию
13.11 1968 г.

Кафедра
общей физики для мехмата