Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1969

УДК 521.13

В. П. ДОЛГАЧЕВ

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ДВИЖЕНИИ ДАЛЕКИХ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

Выведены формулы для вековых возмущений второго порядка элементов орбит далеких ИСЗ. Полученные формулы справедливы для почтикруговых орбит, имеющих малый наклон к плоскости эклиптики.

Рассматривается задача эволюции орбиты искусственного спутника Земли под влиянием сжатия Земли и притяжения Луны, которая считается материальной точкой. В предыдущей работе [1] были получены аналитические выражения для вековых возмущений первого порядка в движении далеких ИСЗ.

Предлагаемая работа посвящена выводу формул для вековых возмущений при условии изменения долготы перигея и долготы восходящего узла орбиты Луны, вызываемых возмущениями от Солнца.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $Oxyz$ — прямоугольная геоцентрическая система координат, ось Ox которой направлена в точку весеннего равноденствия, плоскость xOy совпадает с плоскостью эклиптики фиксированной эпохи, ось Oz направлена в северный полюс эклиптики, а ось Oy дополняет систему до правой.

Возмущающая функция, обусловленная притяжением спутника Луной и сжатием Земли, имеет следующее выражение:

$$R_1 = \mu_L \left(\frac{1}{\Delta_L} - \frac{r \cos \psi}{r_L^2} \right) + \frac{1}{3} \mu_E J \frac{a_0^2}{r^3} (1 - 3 \sin^2 \delta), \tag{1}$$

где $\mu_L = fm_L$, $\mu_E = fm_E$, f — постоянная тяготения, m_L, m_E — массы Луны и Земли соответственно, x, y, z, x_L, y_L, z_L — координаты спутника и Луны,

$$r_L^2 = x_L^2 + y_L^2 + z_L^2, \quad \Delta_L^2 = (x - x_L)^2 + (y - y_L)^2 + (z - z_L)^2,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r r_L \cos \psi = x x_L + y y_L + z z_L,$$

J — параметр, характеризующий сжатие, a_0 — экваториальный радиус Земли, δ — склонение спутника к экватору. Разлагая возмущающую функцию, обусловленную притяжением спутника Луной, по полиномам Лежандра и ограничиваясь второй и третьей гармониками, будем иметь

$$R_L = \mu_L \frac{r^2}{r_L^3}\left[\frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2} + \frac{r}{r_L}\left(\frac{5}{2}\cos^3\psi - \frac{3}{2}\cos\psi\right)\right]. \qquad (2)$$

Прямоугольные координаты Луны, выраженные через эллиптические кеплеровские элементы, имеют вид:

$$\begin{aligned} x_L &= r_L\left[\cos(u_L+\Omega_L) + 2\sin^2\frac{i_L}{2}\sin\Omega_L\sin u_L\right], \\ y_L &= r_L\left[\sin(u_L+\Omega_L) - 2\sin^2\frac{i_L}{2}\cos\Omega_L\sin u_L\right], \qquad (3) \\ z_L &= r_L\sin i_L\sin u_L, \end{aligned}$$

где $u_L = v_L+\omega_L$, v_L — истинная аномалия, ω_L — долгота перигея, Ω_L — долгота восходящего узла, i_L — наклон плоскости орбиты Луны к эклиптике. Соотношения между прямоугольными координатами и элементами спутника записываются в аналогичной форме и ради сокращения записи здесь не приводятся.

Как известно, величина $i_L=5°08'43''$, так что величина $\sin^2\frac{i_L}{2} = 0{,}0020\,15$, поэтому во избежание громоздких выкладок в выражении для $\cos\psi$ пренебрегаем слагаемыми, пропорциональными $\sin^2\frac{i_L}{2}$. В таком случае выражение для $\cos\psi$ запишется в виде

$$\cos\psi = \cos(u+\Omega-u_L-\Omega_L) - 2\sin^2\frac{i}{2}\sin(\Omega_L-\Omega+u_L)\sin u + \sin i\sin i_L\sin u\sin u_L.$$

Двукратно осредненная по средним аномалиям спутника и Луны возмущающая функция (2) примет следующее выражение:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{R}}_L = \frac{3}{2}n_1^2F_1a^2\Big\{&\frac{1}{6}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right) - \frac{1}{4}\sin^2 i\cos^2 i_L\left[1+\frac{3}{2}e^2 - \frac{5}{2}e^2\cos 2(\pi-\Omega)\right] + \frac{1}{2}\sin i\sin i_L\cos(\Omega_L-\Omega)\left(1+\frac{3}{2}e^2\right) - \\ &- \frac{5}{2}e^2\sin i\sin i_L\cos(2\pi+\Omega-\Omega_L) - \sin^2\frac{i}{2}\sin i\sin i_L \times \\ &\times\cos(\Omega_L-\Omega)\left(1+\frac{3}{2}e^2-\frac{5}{2}e^2\cos 2(\pi-\Omega)\right)\Big\}, \end{aligned}$$

где обозначено

$$F_1 = 1+\frac{3}{2}e_L^2+\frac{15}{8}e_L^4+\frac{35}{16}e_L^6,\quad n_1^2=\frac{\mu_L}{a_L^3},$$

$\pi=\omega+\Omega$, e, e_L и a, a_L — эксцентриситеты и большие полуоси орбит спутника и Луны соответственно.

Необходимо отметить.

1. Полученное выражение r_L является точным относительно эксцен-

трисистета орбиты спутника и приближенным относительно эксцентриситета орбиты Луны. В последнем случае сохранены слагаемые не выше 6-й степени относительно e_L.

2. Выражение $\bar{\bar{R}}_L$ не содержит ω_L, т. е. вековое движение рассматриваемого класса орбит спутников не зависит от ω_L, что объясняется методом разложения возмущающей функции.

Двукратно осредненная по средним аномалиям спутника и Луны возмущающая функция от сжатия в принятой системе координат имеет вид

$$R_E = \beta\left(1 + \frac{3}{2} e^2\right)\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\sin^2\varepsilon + \sin^2 i\cos 2\varepsilon + \sin^2 i\cos 2\varepsilon + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sin^2 i\sin^2\Omega\sin^2\varepsilon + \frac{1}{2}\cos\Omega\sin 2i\sin 2\varepsilon\right)\right],$$

где $\beta = Jn^2a_0^2$, n — среднее движение спутника, ε — угол наклона плоскости экватора к плоскости эклиптики.

§ 2. Дифференциальные уравнения для элементов и их решение

Введем элементы Лагранжа по формулам:

$$\begin{aligned} h &= e\sin\pi, & p &= \sin\frac{i}{2}\sin\Omega, \\ k &= e\cos\pi, & q &= \sin\frac{i}{2}\cos\Omega, \end{aligned} \tag{4}$$

тогда $\bar{\bar{R}}_L$ и $\bar{\bar{R}}_E$ с точностью до двух степеней относительно выбранных элементов примут вид

$$\bar{\bar{R}}_L = \frac{3}{2}n_1^2F_1a^2\left\{\frac{1}{4}(h^2 + k^2) - \cos^2 i_L(p^2 + q^2) + \sin i_L(q\cos\Omega_L + p\sin\Omega_L)\right\},$$

$$\bar{\bar{R}}_E = \beta\left[\frac{1}{2}(h^2 + k^2)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varepsilon\right) - q\sin 2\varepsilon - 2p^2\cos^2\varepsilon - 2q^2\cos 2\varepsilon\right].$$

Дифференциальные уравнения движения спутника в элементах (4) имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial k} + \frac{1}{2}\frac{k}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right), \\ \frac{dk}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{1}{2}\frac{h}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right), \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{4na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{p}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(k\frac{\partial R}{\partial h} - h\frac{\partial R}{\partial k}\right), \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{4na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{q}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(k\frac{\partial R}{\partial h} - h\frac{\partial R}{\partial k}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\sqrt{1-e^2}$ легко выражается через переменные (4).

$$R = \bar{\bar{R}}_L + \bar{\bar{R}}_E = a_1p\sin\Omega_L + q(a_1\cos\Omega_L - a_2) - a_3p^2 - a_4q^2 + a_5(h^2 + k^2),$$

где

$$a_1 = \gamma\sin i_L, \qquad a_4 = \gamma\cos^2 i_L + 2\beta\cos 2\varepsilon,$$

$$a_2 = \beta \sin 2\varepsilon, \qquad a_5 = \frac{1}{4}\gamma + \frac{1}{2}\beta\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\varepsilon\right),$$

$$a_3 = \gamma\cos^2 i_L + 2\beta\cos^2\varepsilon, \quad \gamma = \frac{3}{2}\, n_1^2 F_1 a^2.$$

Необходимо отметить, что все a_i ($i=1, 2, ..., 5$) положительные числа.

В явном виде система уравнений (5) запишется

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2a_5}{na^2}k, \qquad \frac{dk}{dt} = -\frac{2a_5}{na^2}h; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{4na^2}(a_1\cos\Omega_L - a_2 - 2a_4 q), \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{1}{4na^2}(a_1\sin\Omega_L - 2a_3 p). \end{aligned} \tag{7}$$

Вековые возмущения первого порядка для h и k даются следующими выражениями:

$$h = C_1^*\cos\varkappa t + C_2^*\sin\varkappa t, \quad k = C_2^*\cos\varkappa t - C_1^*\sin\varkappa t,$$

где $\varkappa = \frac{2a_5}{na^2}$, C_1^* и C_2^* — произвольные постоянные.

Долгота восходящего узла орбиты Луны на эклиптике представляется в виде

$$\Omega_L = \alpha t + \Omega_0,$$

где $\alpha = -19{,}3411$ *град/год*, Ω_0 — величина долготы восходящего узла орбиты Луны в начальный момент.

Общее решение неоднородной системы (7) имеет вид

$$\begin{aligned} p &= \frac{b_1(\alpha - b_2)}{\alpha^2 - s^2}\sin(\alpha t + \Omega_0) - b_2(C_1\cos st + C_2\sin st), \\ q &= -\frac{b_0}{b_2} + \frac{b_1(\alpha - b_3)}{\alpha^2 - s^2}\cos(\alpha t + \Omega_0) + s(C_2\cos st - C_1\sin st), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$s^2 = b_2 b_3$, $b_0 = \frac{a_2}{4na^2}$, $b_1 = \frac{a_1}{4na^2}$, $b_2 = \frac{a_4}{2na^2}$, $b_3 = \frac{a_3}{2na^2}$, C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Исследуем область применимости полученных формул для p и q. Знаменатель $\alpha^2 - s^2$ при подстановке вместо b_i ($i=0, 1 ... 3$) их выражений через элементы орбит спутника и Луны представляет собой дробно-рациональное выражение относительно большой полуоси спутника вида $F(a)/a^7$, где $F(a)$ — многочлен 10-й степени относительно a.

Принимая

$$\left.\begin{aligned} a_L &= 384\,400 \text{ км}, & \varepsilon &= 23°26'37'', \\ \mu_L &= 4\,889 \text{ км}^3/\text{сек}, & a_0 &= 6378 \text{ км}, \\ \mu_E &= 398\,620 \text{ км}^3/\text{сек}, & J &= 0{,}001623, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

получим

$$\begin{aligned} F(a) = {} & 0{,}103806 \cdot 10^{-31} \cdot a^{10} - 0{,}114422 \cdot 10^{-15} a^7 + \\ & + 0{,}647712 \cdot 10^{-8} a^5 + 0{,}999478 \cdot 10^{15}. \end{aligned}$$

Можно показать, что уравнение $F(a)=0$ имеет два действительных положительных корня, равные $a_1=26600$ *км*, $a_2=222400$ *км*. Второй корень a_2 не представляет интереса, так как полученная величина большой полуоси спутника соответствует такой области пространства, где разложение возмущающей функции по полиномам Лежандра неэффективно.

Если рассматривать задачу о вековых возмущениях элементов спутника только от Луны, то имеется единственная резонансная большая полуось, равная $\overset{*}{a}_2=222450$ *км*, что также не представляет интереса по указанным выше соображениям. Итак, в рамках рассматриваемой задачи имеется только одно значение резонансной большой полуоси, равное a_1.

Провести анализ изменения элементов i и Ω по формулам (8) подобно тому, как это проводится в классической теории планетных возмущений, довольно затруднительно, поэтому ограничимся некоторыми численными результатами.

§ 3. Численный пример

В качестве примера рассмотрим эволюцию орбит, имеющих следующие начальные значения наклонения и долготы восходящего узла: $i_0=3°$, $\Omega_0=45°$. При $a=20000$ *км* и значений параметров согласно (9) имеем следующие значения p и q в функции времени:

$$p=0{,}690957\cdot 10^{-3}\sin(-19°{,}3411t+45°)+$$
$$+0{,}180212\cdot 10^{-1}\cos 5°{,}102171t-0{,}342417\sin 5°{,}102171t,$$
$$q=-0{,}361657+0{,}802355\cdot 10^{-3}\cos(-19°{,}3411t+45°)+$$
$$+0{,}379600\cos 5°{,}102171\,t-0{,}199979\cdot 10^{-1}\sin 5°{,}102171\,t,$$

где время t выражено в годах.

Из приведенных выражений видно, что амплитуда собственных колебаний на 2—3 порядка больше амплитуды вынужденных колебаний, так что последними можно пренебречь. Однако можно привести пример, где упомянутые амплитуды одного порядка.

Так, в случае $a=10^5$ *км* имеем

$$p=-0{,}019750\sin(-19°{,}3411t+45°)+0{,}032475\cos 6°,\,01090t-$$
$$-0{,}041827\sin 6°,\,01090t,$$
$$q=-0{,}993754\cdot 10^{-2}-0{,}019106\cos(-19°{,}3411t+45°)+$$
$$+0{,}041958\cos 6°{,}01090t-0{,}032577\sin 6°{,}01090t.$$

Представляется более удобным исследовать возмущения кеплеровских элементов, так как они имеют простой геометрический смысл. Поэтому ниже приводятся для иллюстрации графики изменения наклонения i и долготы восходящего узла Ω орбиты спутника в двух вариантах: а) при условии векового изменения долготы восходящего узла орбиты Луны, б) при отсутствии векового изменения Ω_L, т. е. $\alpha=0$ (невозмущенная орбита Луны).

На рис. 1—3 приведены графики изменения наклонения i орбиты спутника на интервале 40 лет для трех фиксированных значений большой полуоси, а на рис. 4—6 представлены графики изменения Ω на таком же интервале времени и для тех же значений большой полуоси.

Из рис. 1—6 видно, что величина i существенно возрастает, в то время как Ω непрерывно уменьшается, т. е. Ω имеет обратное движение по эклиптике.

Из приведенных графиков также следует, что возмущения элементов спутника от Луны, движущейся по возмущенной и невозмущенной

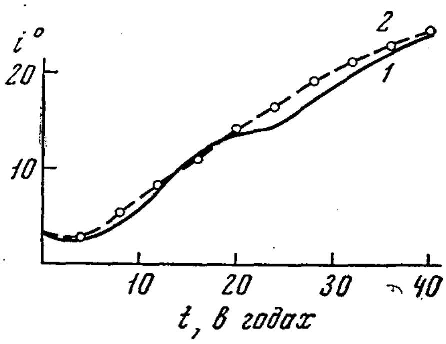

Рис. 1. Вековое возмущение наклонения орбиты i с большой полуосью $6 \cdot 10^4$ *км*. *1* — возмущенная орбита Луны, *2* — невозмущенная орбита Луны

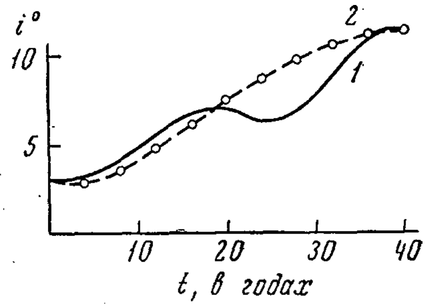

Рис. 2. Вековое возмущение наклонения орбиты i с большой полуосью $8 \cdot 10^4$ *км*. *1* — возмущенная орбита Луны, *2* — невозмущенная орбита Луны

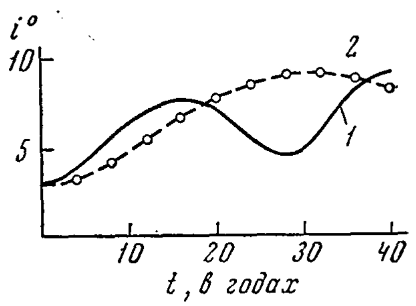

Рис. 3. Вековое возмущение наклонения орбиты i с большой полуосью 10^5 *км*. *1*—возмущенная орбита Луны, *2* — невозмущенная орбита Луны

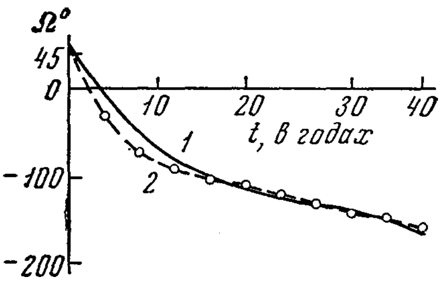

Рис. 4. Вековое возмущение долготы восходящего узла орбиты Ω с большой полуосью $6 \cdot 10^4$ *км*. *1* — возмущенная орбита Луны, *2* — невозмущенная орбита Луны

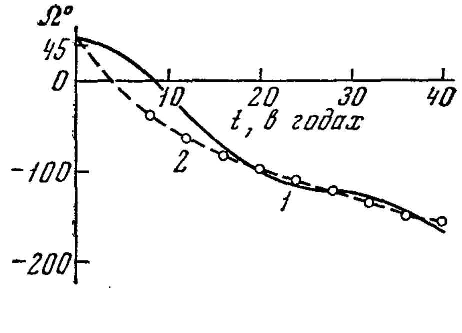

Рис. 5. Вековое возмущение долготы восходящего узла орбиты Ω с большой полуосью $8 \cdot 10^4$ *км*. *1* — возмущенная орбита Луны, *2* — невозмущенная орбита Луны

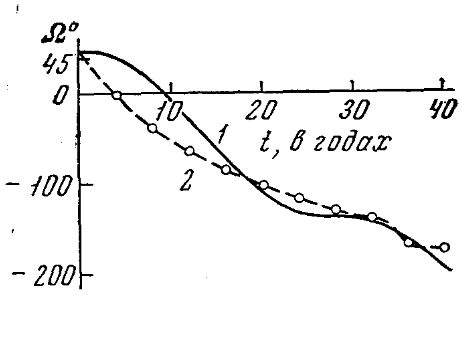

Рис. 6. Вековое возмущение долготы восходящего узла орбиты Ω с большой полуосью 10^4 *км*. *1* — возмущенная орбита Луны, *2*—невозмущенная орбита Луны

орбите, наиболее заметно отличаются друг от друга при величинах больших полуосей порядка $(8 \div 10) 10^4$ *км*.

В заключение необходимо сделать следующие выводы.

1. В области пространства, соответствующей геоцентрическому рас-

стоянию более чем $5 \cdot 10^4$ *км*, вековое изменение Ω_L оказывает существенное влияние на величины вековых изменений элементов орбиты спутника.

2. Несмотря на существование особенности в выведенных формулах при $a = a_1$, возмущения элементов от Луны в этой области пространства незначительны, что позволяет воспользоваться формулами для возмущений первого порядка, которые не имеют особенностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгачев В. П. «Сообщения ГАИШ», № 154, 1968.
2. Смарт У. Небесная механика. М., «Мир», 1965.

Поступила в редакцию
22.10 1968 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии