Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1969

УДК 528

Н. А. ЧУЙКОВА

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФИГУРЫ И ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЛУНЫ

В работе рассмотрены пять доступных в настоящее время методов определения гравитационного поля и фигуры Луны: гидростатическая теория, наблюдения физической либрации Луны, по движению перигея и узла лунной орбиты, траекторные измерения движения ИСЛ, по видимой топографии. Полученная информация позволяет выдвинуть некоторые гипотезы о внутреннем строении Луны.

В настоящее время вследствие отсутствия гравиметрических измерений на поверхности Луны мы можем судить о ее фигуре и гравитационном поле лишь косвенным путем. При этом возможны два подхода к этой проблеме. Во-первых, можно найти параметры ее фигуры и поля, задаваясь некоторой гипотезой о внутреннем строении Луны и о состоянии масс внутри ее — это так называемая внутренняя теория фигуры Луны. Здесь можно рассмотреть два вопроса: гидростатическая теория фигуры Луны [1], [2]; нахождение поля однородной Луны по ее видимой топографии [3]. Во-вторых, можно судить о гравитационном поле и фигуре Луны, исходя из ее движения или движения некоторых сил (спутников), движущихся в ее гравитационном поле — это внешняя теория. До последнего времени внешняя теория касалась рассмотрения лишь двух вопросов: получение динамических коэффициентов сжатия Луны из наблюдения физической либрации [4], [5], [6], [7]; определение параметров фигуры Луны из движения перигея и узла лунной орбиты [1], [8], [9], [10], [11]. Сейчас, в связи с запуском ИСЛ, стал доступен третий метод определения гравитационного поля Луны из траекторных измерений спутниковых движений [12], [13], [14], [15], [16], [17]. Все эти методы позволяют получить довольно полную информацию о гравитационном поле и фигуре Луны, исходя из которой можно выдвинуть некоторые гипотезы и о внутреннем строении Луны.

Исторически сложился подход к рассмотрению фигур небесных тел как фигур равновесия вращающейся жидкости [18]. Для Луны будем учитывать еще внешний возмущающий фактор — притяжение Земли. Фигура Луны в этом случае определяется поверхностью, на которой является постоянным сумма потенциалов всех сил, действующих на нее $W = V + \Phi + \Omega$, где V — потенциал тяготения Луны, Φ — Земли, Ω — центробежный потенциал. Заменяя Землю точечной массой M', находящейся на расстоянии d от центра Луны, и считая, что Луна вращается с угловой скоростью $n=\sqrt{G(M+M')/d^3}$ вокруг общего центра тяжести Земли и Луны, получим

$$\Phi+\Omega\cong\frac{GM'}{2d^3}(3x^2-z^2),$$

где $oxyz$ — прямоугольная система координат с центром в центре тяжести Луны, ось x направлена к Земле.

Под воздействием этого возмущающего потенциала $\Phi+\Omega$ поверхность Луны испытывает деформацию, выражающуюся гармоникой второго порядка εY_2: $r=R(1+\varepsilon Y_2)$, где R — средний радиус Луны. Потенциал однородной Луны, ограниченной такой поверхностью, выражается формулой

$$V=\frac{GM}{r}\left(1+\frac{3}{5}\frac{R^2}{r^2}\varepsilon Y_2\right),$$

где M — масса Луны.

Подставляя полученные формулы в уравнение поверхности Луны, получим это уравнение в явном виде:

$$r=R\left(1+\frac{5}{12}\frac{M'}{M}\frac{R^3}{d^3}\frac{7x^2-2y^2-5z^2}{R^2}\right).$$

Отсюда можно найти гидростатические коэффициенты сжатия уровенного эллипсоида [1]:

$$\beta=(a-c)/R=0{,}375\cdot10^{-4};\qquad \alpha=(b-c)/R=0{,}94\cdot10^{-5};$$

$$\gamma=(a-b)/R=0{,}28\cdot10^{-4};\qquad f=\alpha/\beta=0{,}25,$$

где α, β — полярные сжатия планеты, γ — экваториальное сжатие, a, b, c — главные оси эллипсоида, f — постоянная либрации Луны.

Еще издавна было замечено большое расхождение между гидростатическими коэффициентами сжатия Луны и наблюдениями [1], полученными из обработки данных физической либрации Луны. Теория вращения Луны позволяет установить связь между параметрами либрации Луны и динамическими коэффициентами сжатия $\beta'=(C-A)/B$; $\alpha'=(C-B)/A$, $\gamma'=(B-A)/C$, которые равны примерно геометрическим для случая однородной Луны (здесь A, B, C — моменты инерции Луны).

Если считать Луну абсолютно твердым телом, то для описания ее вращения можно применить законы Эйлера:

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=L_x,\quad B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=L_y,$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=L_z,$$

где p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на подвижные оси, связанные с телом Луны, L_x, L_y, L_z — проекции момента внешней силы притяжения Земли;

$$L_x=3GM'R^{-5}(C-B)y'z';\ L_y=3GM'R^{-5}(A-C)z'x',$$

$$L_z=3GM'R^{-5}(B-A)x'y'.$$

Здесь x', y', z' — координаты Земли в подвижной системе координат, которая связана с эклиптической через углы Эйлера φ, ψ, θ: φ — угол между осью x, направленной по линии пересечения плоскостей лунного экватора и первого меридиана, и направлением нисходящего узла лунного экватора; ψ — долгота нисходящего узла лунного экватора, θ — наклонность экватора к эклиптике.

Считая, что действительное вращение Луны мало отличается от законов Кассини (т. е. $\varphi=180°+(m+\tau)-\psi$, $\psi=n+\sigma$; $\theta=I+\rho$, где m, n, I — средние долготы Луны, восходящего узла ее орбиты и средняя наклонность: τ, σ, ρ — малые добавки к этим величинам, получившим название физической либрации в долготе, узле и наклонности) и переходя в уравнениях Эйлера к эклиптической системе координат, мы получим систему трех уравнений второго порядка относительно неизвестных величин τ, σ, ρ. Интегрируя их, можно выразить величины τ, σ, ρ через элементы лунной орбиты и моменты инерции Луны. Обычно из наблюдений либрации определяют не τ, σ, ρ, а I и f, которые связаны с динамическими коэффициентами сжатия приближенными соотношениями

$$\beta=\frac{(1+\mu)(2\mu+\mu^2)I}{3i\sqrt{1+\mu+\mu^2/2}+3(1+\mu)I},\ \alpha=\beta f,\ \gamma=\beta-\alpha,$$

где μ — отношение средних суточных изменений долгот узла и Луны, i — наклонность лунной орбиты к эклиптике.

Наиболее современные данные о величине физической либрации Луны, полученные на основе четырех серий 3282—х гелиометрических наблюдений Луны в период 1877—1915 г., дают [7], $f=0{,}633\pm0{,}006$, $I=1°32'04''$. Используя эти величины, получим для динамических коэффициентов сжатия лунного эллипсоида следующие значения: $\alpha=0{,}3984\cdot10^{-3}$, $\beta=0{,}6294\cdot10^{-3}$, $\gamma=0{,}2310\cdot10^{-3}$.

Расхождение полученных коэффициентов с гидростатическими свидетельствует о том, что в настоящее время распределение масс в Луне не согласуется с теорией гидростатического равновесия. Массы, составляющие кору Земли, также не находятся в равновесии. Но так как изостатическая поверхность Земли внутри которой осуществляется равновесие, находится на небольшой относительной глубине, то в целом Земля хорошо согласуется с теорией Клеро. Если считать, что Луна составлена примерно из тех же материалов, что и Земля, то можно примерно рассчитать толщину лунной коры из сравнения с Землей. Такой расчет был выполнен В. Ситтером [19]. Им было получено $h=0{,}40\cdot R_{☾}$, в то время как для Земли $h=0{,}018\ R_{\oplus}$.

Мы видим, что кора Луны, т. е. область нескомпенсированных неоднородностей, занимает значительную часть лунного объема. Поэтому наблюдаемые отличия в моментах инерции обусловлены почти целиком неоднородностями коры и лишь в малой степени центральной частью Луны. Эти соображения позволяют ввести поправку в гидростатическую теорию фигуры Луны. Так, для Земли мы знаем, что в то время как возмущение фигуры, вызванное вращением Земли, является почти целиком гидростатическим, возмущение же, вызванное лунным притяжением (приливы), составляет лишь $q=0{,}24$ от своей равновесной величины. Если считать для Луны $q\leqslant0{,}24$ (поскольку мантия Луны, как мы убедились, гораздо более тверда, чем мантия Земли на одинаковых относительных глубинах) и внести этот коэффициент в гидростатическую теорию, то $f=\alpha/\beta=1/(1+3q)\geqslant0{,}584$; при $q=0{,}20$ $f=0{,}60$ — значение, близкое к наблюденному.

Некоторую информацию о фигуре и строении Луны нам может дать также наблюдение возмущений лунной орбиты. Отличие фигуры Луны от фигуры сферы с концентрическим распределением плотностей влияет на вековые движения перигея и узла лунной орбиты. Это влияние можно найти, если применить принцип Якоби к решению основной проблемы движения Луны. Движение Луны под действием притяжения Земли и Солнца, предполагаемых точечными массами, определяется решением канонической системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

и зависит от шести канонических элементов w_i, c_i, где w_1, w_2, w_3 — средние долготы Луны, перигея и узла ее орбиты. Наличие возмущающей функции R вызовет изменение этих элементов, определяемое из уравнений

$$\frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial R}{\partial w_i}, \quad \frac{dw_i}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial c_i}.$$

В данном случае в качестве функции R выступает отличие взаимной силовой функции притяжения Земли (точечной) и Луны от силовой функции точечных масс:

$$R = M'G\int\frac{dM}{\Delta} - G\frac{MM'}{r},$$

где $\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2}$; $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — радиус-вектор лунной орбиты, $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ — текущий радиус точек Луны. Разлагая обратное расстояние $1/\Delta$ в ряд, интегрируя и переходя к астрономическим координатам, получим с точностью до членов второго порядка:

$$R = G\frac{M+M'}{2r^3M}\left[3\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\left(\frac{1}{3} - \sin^2\delta\right) + \frac{3}{2}(B-A)\cos^2\delta\cdot\cos 2\alpha\right],$$

где $\sin\delta = \sin(i+I)\sin(w_1 - w_2)$; $\alpha = V - w_1$ — разность истинной V и средней долгот Луны.

Для оценки влияния этой возмущающей функции на вековые движения перигея и узла нам нужно рассмотреть только постоянную ее часть R_0, дающую малые добавки δn_2, δn_3 в величины среднего движения перигея и узла n_2, n_3:

$$\delta n_2 = -\frac{\partial R_0}{\partial c_2} = -\frac{4n_1}{Ma^2}\left[\rho_e\left(C - \frac{A+B}{2}\right) + \frac{3}{2}\rho_c(B-A)\right],$$

$$\delta n_3 = -\frac{\partial R_0}{\partial c_3} = -\frac{3n_1}{8Ma^2}\cdot\frac{\sin 2(i+I)}{\sin i}\left[\left(C - \frac{A+B}{2}\right) + \frac{1}{2}(B-A)\right],$$

где ρ_e, ρ_c — некоторые численные постоянные: $\rho_e = 0{,}386$, $\rho_c = -0{,}678$; $c_2 = -\frac{1}{8}n_1a^2e^2$; $c_3 = -2n_1a^2\sin^2(i/2)$. Выделив из общего движения перигея и узла ту часть, которая зависит только от фигуры Луны [9]: $\delta n_2 = -3'',1$, $\delta n_3 = -27'',9$ (в столетие), найдем параметры, характеризующие фигуру Луны:

$$I_2 = \frac{5}{2}\,\frac{C-(A+B)/2}{MR^2} = 0{,}83\cdot 10^{-4}; \quad K = \frac{5}{2}\,\frac{B-A}{MR^2} = 0{,}37\cdot 10^{-4}.$$

Объединяя полученные данные с результатами измерений физической либрации Луны, можно найти параметр $g = C/MR^2$, характеризующий распределение плотности внутри тела. Для однородной сферы $g = 0{,}4$, для полого шара $g = 0{,}66$; для Луны: $g = \frac{2}{5}(I_2 + K/2)/\beta = 0{,}64$, т. е. получается, что плотность Луны увеличивается к поверхности. Объяснение этому парадоксальному факту можно найти как в неточностях лунной теории, так и в том, что давление в недрах Луны из-за малости ее размеров не дает сжатия вещества большего, чем термическое расширение. Расчеты по термической истории Луны, проделанные В. С. Сафроновым [20], показывают, что центральная область Луны должна находиться в полурасплавленном состоянии. Так, как различие плотностей жидкой и твердой фаз велико, то в итоге Луна окажется менее плотной к центру при том условии, что дифференциация вещества еще не произошла.

Все описанные выше методы позволяют получить лишь основные параметры фигуры Луны — ее динамические коэффициенты сжатия, которые выражаются через члены второго порядка в разложении гравитационного потенциала Луны по сферическим функциям:

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\sim} \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{R}{r}\right)^n (c_{nm} \cos m\lambda + d_{nm} \sin m\lambda) \cdot P_n^m(\sin\varphi)\right\},$$

где

$$c_{20} = -\frac{C - (A+B)/2}{MR^2}; \quad c_{22} = \frac{B-A}{4MR^2}. \qquad [19]$$

Наиболее полную и подробную характеристику гравитационного поля можно получить лишь из наблюдения ИСЛ. Проблема определения параметров гравитационного поля Луны с помощью данных слежения ИСЛ аналогична проблеме определения земного поля. Однако имеющиеся отличия в динамике орбиты лунного спутника и в технике слежения за ним обеспечивают некоторые преимущества и недостатки. Например, земные спутники проходят через поле зрения станции слежения очень быстро, так что со станции спутник наблюдается только ограниченное время и на малом участке орбиты. Поэтому данные для них должны получаться с большого числа станций на различных широтах. Лунные же спутники видны с Земли от восхода до захода Луны (исключая время затмения спутников Луной). Поэтому две соответственно расположенные станции могут получить почти полные данные для определения орбиты лунных спутников. Следующее отличие вызвано большим расстоянием лунных спутников, из-за чего угловые измерения их положения уже становятся неэффективными и заменяются измерениями расстояний и скоростей. Так, угловая ошибка в 0°, 1 соответствует ошибке в позиции спутника свыше 600 *км*, измерения же расстояния возможны с точностью 10—15 *м*.

Одно из главных отличий между динамиками орбит лунных и земных спутников вызвано отличиями скоростей вращения Земли и Луны. В то время как для земных спутников отношение средних движений спутника и центрального тела равно примерно 15, для лунных спутников это отношение равно примерно 200. Поэтому можно считать, что лунный спутник в течение примерно пяти оборотов находится в стабильном гравитационном поле, ибо Луна за это время повернется лишь на 10°. Это обстоятельство делает возможным определение средних орбитальных параметров из слежения, например, двух последовательных оборотов спутника. А затем из изменения этих элементов, как вековых так и долгопериодических, можно найти и параметры гравитационного поля Луны, причем не только зональные члены, но и долготные.

Для определения параметров гравитационного поля Луны применим ту же методику, что и для Земли: тем или иным методом находится промежуточная орбита спутника [21]. Затем из сравнения наблюденной орбиты и теоретической находятся наряду с точными значениями элементов орбиты величины гармоник потенциала Луны.

За последнее время опубликовано несколько данных определения гармоник потенциала Луны [12], [13], [15], [16]. Величины коэффициентов при гармониках приведены в таблице.

$c_{nm} \cdot 10^4C$	По наблюдениям спутника «Луна-10» [12]	По наблюдениям американских спутников «Orbiter» [15]	По наблюдениям американских спутников «Orbiter» [16]
c_{20}	—2,06 ±0,22	—2,0596±0,141	—2,0263±0,0143
c_{21}	0,157+0,059	—0,1661+0,051	—0,0878±0,0131
c_{22}	0,140∓0,012	0,2042±0,029	0,2191±0,0249
c_{30}	—0,363±0,099	—0,3773±0,180	—0,2223±0,0262
c_{31}	—0,568±0,026	0,3012±0, 48	0,3636±0,0025
c_{32}	0,118±0,047	0,1294±0,028	—0,0257±0,0058
c_{33}		0,0317+0,015	—0,0265±0,0079
c_{40}	0,333±0,270	0,0798±0,128	0,0941±0,0190
c_{41}		—0,1560+0,036	—0,1236±0,0046
c_{42}		0,0011∓0,010	0,0361+0,0034
c_{43}		—0,0082±0,008	0,0164±0,2747
c_{44}		—0,0007±0,003	0,0091±0,0011
c_{50}		—0,5505+0,171	—0,1614±0,0321
c_{51}		—0,0385±0,037	
c_{52}		—0,0342±0,009	
c_{53}		—0,0071±0,002	
c_{54}		—0,0008±0,001	
c_{55}		—0,0003±0,002	
c_{60}			—0,1089±0,0121
c_{70}			0,1734+0,0122
c_{80}			—0,2011+0,0114
$d_{nm} \cdot 10^4$			
d_{21}	0,0361±0,0358	0,0080±0,039	0,0150±0,0139
d_{22}	—0,0139±0,0145	—0,0342±0,025	0,1310+0,0335
d_{31}	—0,178 ±0,032	0,1762±0,053	0,0740±0,0032
d_{32}	—0,007 ±0,046	—0,0147+0,033	—0,0200±0,0063
d_{33}		—0,0043±0,018	—0,0496±0,0114
d_{41}		0,0391±0,028	0,0564±0,0051
d_{42}		0,0072±0,013	0,0051±0,0035
d_{43}		—0,0001±0,006	—0,0276±0,0015
d_{44}		0,0011±0,003	0,0079+0,0011
d_{51}		0,0829±0,031	
d_{52}		—0,0203±0,008	
d_{53}		—0,0078±0,002	
d_{54}		—0,0013±0,001	
d_{55}		0,0003±0,0002	

Сравнение полученных результатов показывает хорошее совпадение трех независимых определений, за исключением гармоник c_{21} и c_{31}, d_{31}. Однако из-за малого разнообразия параметров орбит спутников, особенно наклонений (72°, 12°, 18°, 21°, 85°), существует большая корреляция между различными гармониками потенциала (k=0,9—1,0). Поэтому результаты определения гравитационного поля Луны по наблюдениям ИСЛ нуждаются в дальнейшей проверке.

Если бы Луна была однородной, то можно было бы найти гармоники ее гравитационного поля, используя разложение высот видимого рельефа Луны по сферическим формулам

$$r = R\left[1 + \sum_{n=1}^{n_1} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm} \cos m\lambda + b_{nm} \sin m\lambda)\, P_n^m (\sin \varphi)\right].$$

Интегрируя по всем массам Луны, можно найти связь между коэффициентами разложения потенциала и рельефа [3]:

$$c_{nm} = (3/(2n+1))\,a_{nm};\quad d_{nm} = (3/(2n+1))\,b_{nm}.$$

Используя коэффициенты разложения рельефа, полученные Гудасом [22] на основе наиболее надежных данных измерения высот лунной поверхности, можно получить следующие коэффициенты разложения потенциала по сферическим функциям.

	c_{20}	c_{22}	c_{30}	c_{32}	c_{40}	c_{42}	c_{44}
$c_{nm}\cdot 10^4$	−1,21	0,93	−0,74	−0,07	0,37	−0,125	0,015
	d_{21}	d_{31}	d_{33}	d_{41}	d_{43}		
$d_{nm}\cdot 10^4$	0,90	0,15	0,00	0,712	0,005		

Здесь коэффициенты $c_{n,\,2m-1}$, $d_{n,\,2m}$ отсутствуют из-за предположения Гудаса о симметрии видимой и обратной сторон Луны. Большое отличие между коэффициентами гармоник гравитационного поля Луны, полученными по спутниковым данным и по видимой топографии Луны, говорит о том, что Луну нельзя считать однородной. Однако между видимым рельефом и гравитационным полем существует некоторая корреляция. Коэффициент корреляции, по подсчетам Каулы [17], равен 0,33 при сравнении с данными, полученными по спутнику «Луна-10» и 0,59— по американским спутникам.

Таким образом, мы рассмотрели все доступные в настоящее время возможности определения гравитационного поля Луны. Зная же параметры поля Луны, можно найти уравнение уровенной поверхности планеты — так называемый селеноид, а также распределение силы тяжести как на селеноиде [19], так и на физической поверхности Луны [23]. Сравнивая полученные теоретические результаты с непосредственными результатами измерений силы тяжести на поверхности Луны, можно будет судить об отклонениях внутреннего строения Луны от принятых гипотез, а также о точных значениях высот на Луне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джеффрис Г. Земля. М., ИЛ, 1960.
2. Нефедьев А. А. «Изв. АОЭ», № 30, 1958.
3. Goudas C. L. Icarus, 3, 375, 1964.
4. Яковкин А. А. «Изв. АОЭ», № 13, 1928.
5. Белькович И. В. «Изв. АОЭ», № 24, 1949.
6. Хабибуллин Ш. «Изв. АОЭ», № 31, 1958.
7. Koziel K. Icarus, 7, 1, 1967.
8. Brown E. W. Mem. of RAS, 59, 1, 1908.
9. Eckert W. J. Astron. Journ., 70, 787, 1966.
10. Sitter D., Proc W. K. Akad. Wet. Amst. 17, 1309, 1915.
11. Jones H. Sp. M. N. of RAS, 97, 406, 1937.
12. Аким Э. Л. ДАН СССР, 170, 799, 1966.
13. Michael W. H., Tolson R. H., Gapcynski J. P. Science, 153, 1102, 1966.
14. Goudas C. L., Kopal Z. Nature, 212, 271, 1966.
15. Tolson R. H., Gapcynski J. P. IQSY/COSPAR Assemblies, July, 1967.

16. L o r e l l L., I j o g r e n W. L. Science, **159**, 625, 1968.
17. K a u l a W. M. Phyl. trans. of R. S. London, ser. A, 262, 148, 1967.
18. K o p a l Z. Figures of equilibrium of celestial bodies. Madison, 1960.
19. Ч у й к о в а Н. А. «Астрон. журн.», **45**, 1292, 1968.
20. С а ф р о н о в В. С. В кн.: «Фигура и движение Луны», вып. 2. Киев, «Наукова думка», 1967, стр. 105.
21. R o y A. E. Icarus, **9**, 82, 1968.
22. B r a y T. A., G o u d a s C. L. Icarus, **5**, 526, 1966.
23. Ч у й к о в а Н. А. «Астрон. журн.», **46**, 1124, 1969.

Поступила в редакцию
18.12 1968 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии