УДК 517.925

В. М. ВОЛОСОВ, Г. Н. МЕДВЕДЕВ, Б. И. МОРГУНОВ

РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$y^{(n)}+\alpha_1(\mu)\,y^{(n-1)}+\ldots+\alpha_n(\mu)\,y=g(\mu,\theta,t)+$$
$$+\varepsilon f\,[\mu,\mu(t-\Delta),y,y,(t-\Delta),\ldots,y^{(n-1)},y^{(n-1)}(t-\Delta),\theta,\theta(t-\Delta),\varepsilon], \tag{1}$$
$$\dot\theta=\nu(\mu)+\varepsilon\Theta\,[\mu,\mu(t-\Delta),y,y(t-\Delta),\ldots,y^{(n-1)},y^{(n-1)}(t-\Delta),\theta,\theta(t-\Delta),\varepsilon],$$
$$\dot\mu=\varepsilon M\,[\mu,\mu(t-\Delta),y,y(t-\Delta),\ldots,y^{(n-1)},y^{(n-1)}(t-\Delta),\theta,\theta(t-\Delta),\varepsilon],$$

где y — скаляр, θ и μ — векторы, Δ (запаздывание) — постоянная положительная величина, $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Предполагается, что при $\varepsilon=0$ характеристическое уравнение, соответствующее первому из уравнений системы (1), может иметь корни вида $\pm i\omega_j(\mu)$ (простые), $\eta_k(\mu)$ и $\eta_k(\mu)\pm i\sigma_k(\mu)$ (возможно кратные), причем $\mathrm{Re}\,\eta_k<0$ в некоторой области переменных μ (кратность корней в этой области предполагается постоянной).

Системы уравнений, сходные с (1) и не содержащие запаздывания, рассматриваются в работе [1] (см. также [6]).

Система (1) при $\Delta\neq0$ может быть преобразована к виду, удобному для исследования с помощью метода усреднения. Мы ограничимся случаем простых корней и рассмотрим замену переменных:

$$y=U+\sum_j F_j\cos\psi_j+\sum_k K_k+\sum_k(G_k+H_k), \tag{2}$$

где U — решение неоднородного уравнения n-го порядка при $\varepsilon=0$, а K_k, G_k и H_k — решения однородного уравнения n-го порядка при $\varepsilon=0$, соответствующие корням $\eta_k(\mu)$ и $\eta_k(\mu)\pm i\sigma_k(\mu)$ характеристического многочлена.

С помощью замены (2) система (1) приводится к виду

$$\dot x=\varepsilon X\,[x,x(t-\Delta),p,p(t-\Delta),q,q(t-\Delta),\varepsilon],$$
$$\dot p=\omega(x)+\varepsilon P\,[x,x(t-\Delta),p,p(t-\Delta),q,q(t-\Delta),\varepsilon], \tag{3}$$
$$\dot q=\varkappa(x)\,q+\varepsilon Q\,[x,x(t-\Delta),p,p(t-\Delta),q,q(t-\Delta),\varepsilon],$$

где $x=\{\mu,F\}$, $p=\{\psi,\theta,t\}$, $q=\{K,G,H\}$. Система (3) является частным случаем систем, изучавшихся в случае $\Delta=0$ в работе [2] и при наличии запаздывания в работе [3].

Усреднение производится вдоль траекторий вырожденной системы, в которую переходит (3) при $\varepsilon=0$:

$$\dot x=0,\quad \dot p=\omega(x),\quad \dot q=\varkappa(x)\,q. \tag{4}$$

Решение системы (4) в дальнейшем используем в виде

$$x=\mathrm{const},\quad p=\omega(x)\,t+p_0,\quad q=\varphi(x,q_0,t).$$

Специальный вид вырожденной системы (4), а также условие $\mathrm{Re}\,\eta_k<0$ позволяют отказаться от ряда требований к семейству интегральных кривых системы (4) (см. [2]). При этом остаются справедливыми результаты теорем о первом и втором приближениях, аналогичные результатам работы [3], утверждающие близость решений основной системы (3) и усредненных систем первого и второго приближений на асимптотически большом промежутке времени. Например, решение системы первого приближения $\dot\xi=\varepsilon\bar X(\xi)$,

где

$$\bar X(\xi)\equiv\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X\,[\xi,\xi,\omega t+p_0,\omega t+p_0-\omega\Delta,\varphi(\xi,q_0,t),\ \varphi(\xi,q_0,t-\Delta),0]\,dt$$

на интервале $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ удовлетворяет оценке $|x-\xi|=0(1)$, если x, p, q — решение системы (3).

Резонансом в системе (3) назовем случай, когда для некоторого значения x_0 найдется отличный от нуля целочисленный вектор N такой, что

$$N\omega(x_0)=0, \quad \omega(x_0)\neq 0.$$

Вводя переменные $\varphi_j=N_jp$ и β_j так, как это делается в работах [4] и [5], приведем систему (3) к виду

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \varepsilon X[x, x(t-\Delta), \varphi, \varphi(t-\Delta), \beta, \beta(t-\Delta), q, q(t-\Delta), \varepsilon],\\
\dot{\varphi} &= \lambda(x)+\varepsilon\Phi[x, x(t-\Delta), \varphi, \varphi(t-\Delta), \beta, \beta(t-\Delta), q, q(t-\Delta), \varepsilon],\\
\dot{\beta} &= \Omega(x)+\varepsilon B[x, x(t-\Delta), \varphi, \varphi(t-\Delta), \beta, \beta(t-\Delta), q, q(t-\Delta), \varepsilon],\\
\dot{q} &= \varkappa(x)q+\varepsilon Q[x, x(t-\Delta), \varphi, \varphi(t-\Delta), \beta, \beta(t-\Delta), q, q(t-\Delta), \varepsilon]
\end{aligned} \tag{5}$$

здесь $\lambda(x_0)=0$, $\Omega(x_0)\neq 0$).

Резонансные явления исследуются, как и в работе [5], с помощью схемы усреднения, аналогичной той, которая была предложена в работе [4] с учетом тождественного преобразования переменных q при переходе от системы (3) к системе (5). Эта схема усреднения использует средние значения вида

$$\overline{X}(x, \xi, \varphi, \zeta, 0)\equiv\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X[x, \xi, \varphi, \zeta, \Omega t+\beta_0, \Omega t+\beta_0-\Omega\Delta, \varphi(x, q_0, t), \varphi(x, q_0, t-\Delta), 0]\,dt. \tag{6}$$

Устойчивость стационарного резонансного режима

$$\overline{X}(x_0, x_0, \varphi_0, \varphi_0, 0)=0, \quad \lambda(x_0)=0,$$

где $\overline{X}$ определяется формулой (6), обеспечивается достаточными условиями типа условий (5) работы [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Волосов В. М., Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 1969.
2. Волосов В. М. «Успехи матем. наук», 17, вып. 6, 108, 1962.
3. Волосов В. М., Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 2, 1968.
4. Волосов В. М., Моргунов Б. И. «Журн. вычислит. матем. и матем. физика», 8, № 2, 1968.
5. Медведев Г. Н., Моргунов Б. И. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 1969.
6. Байнов Д. «Математични вестник», **5 (20)**, вып. 2, 198—204, 1968.

Поступила в редакцию
6.1 1969 г.

Кафедра
математики

УДК 621.3.032.269.1

Ф. А. КОРОЛЕВ, А. Ф. КУРИН

НЕСИММЕТРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ПУШКА ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ВИНТОВОГО ПУЧКА

В связи с созданием мазеров на циклотронном резонансе (МЦР)[1] возникла проблема получения хорошо закрученных винтовых электронных потоков в магнитном поле, имеющих по возможности малый разброс по продольным скоростям в области взаимодействия с высокочастотным полем волновода или резонатора.

[1] См. А. В. Гапонов, А. А. Гольденберг и др. Письма ЖЭТФ, **2**, 430, 1965.