

4. Hohenmeser C. Phys. Rev., 139, A 185, 1965.
5. Housley R. M., Ericson N. E., Dash J. G. Nucl. Instr. Methods, 27, 29, 1964.
6. Деш Дж. В сб. «Экспериментальная техника эффекта Мёссбауэра». М., «Мир», 1967.
7. Брюханов В. А., Делягин Н. Н., Кузьмин Р. Н. ЖЭТФ, 46, 137, 1964.

Поступила в редакцию
13.2 1969 г.

Кафедра
физики твердого тела

УДК

П. С. БУЛКИН, А. МАРИПОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН ТИПА H_{01} В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ПЛАЗМОЙ

Задача о распространении СВЧ волн в волноводе частично заполненном неоднородным диэлектриком и, в частности, плазмой, является довольно сложной задачей. Число случаев, когда решение таких задач выражается через табулированные функции, невелико [1, 2, 3].

Большинство задач такого типа решается либо приближенными методами, либо с помощью счетно-вычислительных машин.

В настоящей работе излагается метод расчета задачи о распространении симметричных волн типа H_{01} в круглом волноводе, полностью заполненном неоднородной плазмой. Задача решается в предположении, что распределение концентрации электронов плазмы по сечению волновода подчиняется закону

$$N = N_0 \left[1 - \chi \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

Здесь χ — параметр аппроксимации ($0 \leq \chi \leq 1$), N — концентрация электронов на оси волновода, a — радиус волновода, r — расстояние от оси волновода. Такое распределение имеет место, например, в диффузионном режиме газоразрядной плазмы. Потерями энергии СВЧ волны в плазме можно пренебречь.

Задачи такого типа решались в нескольких работах [4, 5, 6, 7]¹. Однако использованные в этих работах методы основаны на применении счетно-вычислительных машин, что, естественно, требует значительного времени для подготовки программы решения. Предлагаемый метод дает решение через табулированные гипергеометрические функции и не требует применения счетно-вычислительных машин.

Предлагаемый метод расчета может быть использован при диагностике плазмы методом проходящей СВЧ волны. Кроме того, предлагаемое решение может быть использовано при наладке и проверке программ счетно-вычислительных машин для решения аналогичных или более сложных задач.

Рассмотрим решение для случая распространения волны типа H_{01} в круглом волноводе. Решение это будем искать через магнитный векторный потенциал $\vec{\Pi}_m e^{i\omega t}$. В волновое уравнение

$$\Delta \vec{\Pi}_m + k_0 \varepsilon(r) \vec{\Pi}_m = 0, \quad \vec{\Pi}_m = \vec{\Pi} e^{-\nu r} \quad (2)$$

подставим выражения для диэлектрической постоянной плазмы

$$\varepsilon(r) = 1 - \frac{4\pi e^2 N_0}{m\omega^2} \left[1 - \chi \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (3)$$

и векторного потенциала. В этих выражениях k_0 — волновое число в свободном пространстве, m и e — масса и заряд электрона, ω — частота поля. После подстановки получим волновое уравнение

¹ В [6 и 7] в дифференциальных уравнениях для компонента поля E_φ отсутствует член вида E_φ / r^2 и полученное решение не соответствует симметричной волне H_{01} .

$$\frac{d^2\Pi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Pi}{dr} + (G + Dr^2)\Pi = 0.$$

Здесь

$$G = k_0 \left(1 - \frac{4\pi e^2 N_0}{m\omega^2} \right) + \gamma^2, \quad D = \chi \frac{4\pi e^2 N_0 k_0}{m\omega^2 a^2}.$$

Введем новые переменные

$$xj\sqrt{D}r^2, \quad y = \Pi e^{x/2}.$$

В этих переменных волновое уравнение принимает вид

$$xy'' + (1-x)y' - \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{4} \frac{G}{\sqrt{D}} \right) y = 0.$$

Решением этого уравнения является функция Куммера первого рода

$$y = {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + j \frac{G}{4\sqrt{D}}; 1; x \right).$$

Выразим функцию Куммера через функцию Уиттекера:

$${}_1F_1 \left[\left(\frac{1}{2} - j\tau \right); \frac{1}{2}; j\xi \right] = \frac{M_{j\tau; 0}(j\xi)}{(j\xi)^{1/2}} \left(\frac{\pi}{2j} \right)^{-1/2}.$$

Здесь

$$\tau = \frac{G}{4\sqrt{D}}, \quad \xi = \sqrt{D}r^2.$$

Окончательное выражение для векторного потенциала имеет вид

$$\Pi = \Pi_0 m_{j\tau; 0}(j\xi) \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-1/2}.$$

Здесь

$$m_{j\tau; 0}(j\xi) = \frac{M_{j\tau; 0}(j\xi)}{(j\xi)^{1/2}} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2}.$$

Значения функции $m_{j\xi; 0}$ и ее производной находятся из таблиц [5].

Компоненты магнитного и электрического полей находим из уравнений

$$E_r = E_z = H_\varphi = 0, \quad E_\varphi = -jk_0 \frac{\partial \Pi}{\partial r},$$

$$H_z = [k_0^2 + \gamma^2] \Pi, \quad H_r = -\gamma \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

В частности, для компонента поля получаем выражение

$$E_\varphi = -j\Pi_0 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} k_0 m'_{j\tau; 0}(j\xi) 2\sqrt{D}r.$$

Волновое число находится из дисперсионного уравнения. Дисперсионное уравнение получим из условия равенства нулю компонента поля на стенках волновода

$$m'_{j\tau; 0}(j\xi_0) = 0, \quad \xi_0 = \sqrt{D}a^2. \quad (4)$$

Корни этого уравнения также находятся из таблиц [5]. Для того чтобы в пределе при малых концентрациях электронов плазмы решение для E_φ переходило в распределение по бесселевской функции первого рода, необходимо использовать первый ряд отрицательных корней уравнения (4).

Значение τ_k , удовлетворяющее уравнению (4), позволяет найти постоянную распространения γ . Обозначив через ω_p плазменную частоту $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m}$, получим

$$\gamma^2 = k^2 \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1 \right) - 4\tau_k \frac{k_0 \omega_p}{a\omega}.$$

На рис. 1 приведена зависимость γ от концентрации электронов плазмы N_0 на оси волновода, рассчитанная описанным методом. Эта же кривая была рассчитана независимым методом с помощью счетно-вычислительной машины. Оба результата совпадают в пределах точности, обусловленной шагом использованных таблиц.

На рис. 2 приведены кривые распределения компонента поля по сечению волновода при разных концентрациях электронов плазмы.

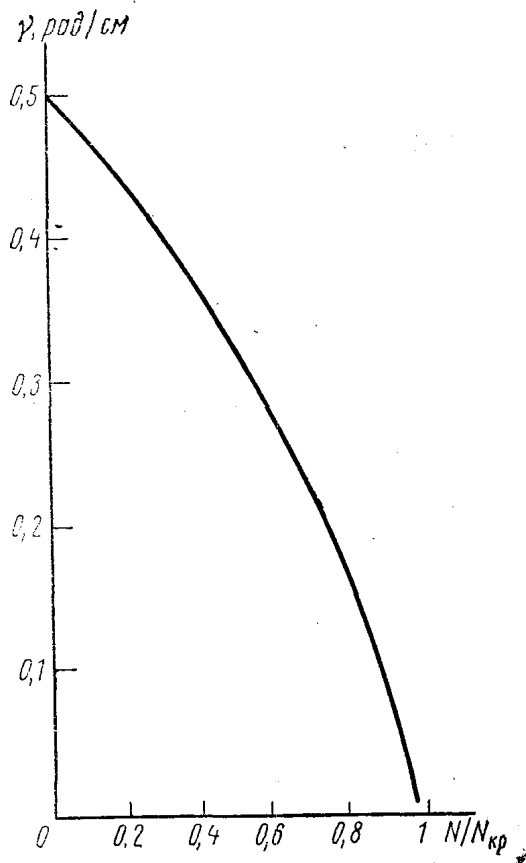


Рис. 1. Зависимость постоянной распространения γ от концентрации электронов $a=10$ см, $f=3000$ мГц

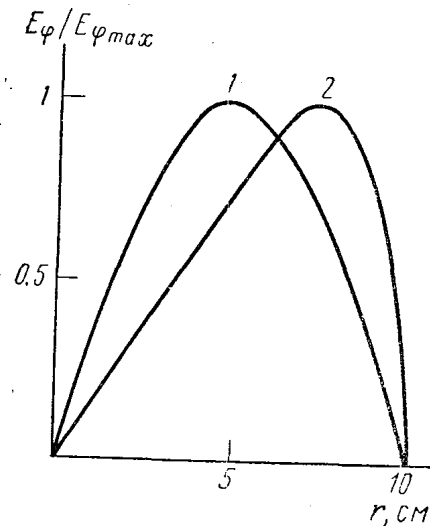


Рис. 2. Распределение компонента поля E_ϕ по радиусу волновода: $a=10$ см, $f=3000$ мГц, $N_{кр} = \omega^2 m / 4\pi e^2$. 1 — $N_0=0,2$ — $N_0=0,8 N_{кр}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Burman R. Trans. JEEE, **AB-13**, No. 4, 646, 1956.
2. Yamada R., Watanabe K. Trans. JEEE, **MMT-13**, No. 5, 716, 1965.
3. Sam E., Klinger Y. JEEE Trans. microwave theory and techn., **15**, No. 1, 60—61, 167.
4. Samaddar S. N., Canadian J. of Physics, **41**, No. 1, 113, 1963.
5. Крепок В. И., Якименко И. П. «Радиотехника и электроника», **13**, вып. 4, 579, 1968.
6. Эллис, Буксбаум. Распространение волн в анизотропной плазме. М., ИЛ.
7. Постнов Г. А. «Радиотехника и электроника», **5**, вып. 10, 1598.
8. Buchholz H. Z. Angew. Math. Mech., **23**, No. 2, 108, 1943.
9. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, ч. 1. М., ИЛ, 1965.

Поступила в редакцию
3.3 1969 г.

Кафедра
электроники