Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1969

УДК 521.13

Л. Г. ЛУКЬЯНОВ

О КОСВЕННОМ ДЕЙСТВИИ ПРИТЯЖЕНИЯ СОЛНЦА НА ДВИЖЕНИЕ ВБЛИЗИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ — ЛУНА

Получено общее решение уравнений в вариациях, описывающих плоское движение тела бесконечно малой массы вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна с учетом косвенного действия притяжения Солнца.

В работе [1] рассмотрены возмущения в движении тела бесконечно малой («нулевой») массы вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна, производимые прямым действием притяжения Солнца. Такая постановка приводит к рассмотрению дважды ограниченной задачи четырех тел, согласно которой Земля, Луна и Солнце движутся по некоторым эллиптическим орбитам относительно центра масс Земли и Луны. Иными словами, в такой постановке задачи не учитывается влияние притяжения Солнца на относительное движение Земли и Луны, и, следовательно, не учитываются возмущения в движении тела нулевой массы от притяжения Земли и Луны, обусловленные влиянием притяжения Солнца на движение Земли и Луны относительно друг друга.

Такое косвенное действие притяжения Солнца (посредством возмущения относительного движения Земли и Луны) на движение тела нулевой массы рассматривается в настоящей работе.

§ 1. Уравнения движения

Наиболее просто основные особенности возмущающего действия Солнца на движение Луны относительно Земли можно учесть путем введения вековых изменений долготы восходящего узла $\dot{\Omega}$ и углового расстояния перигея от узла $\dot{\omega}$[1].

В дальнейшем будем рассматривать только плоскую задачу, т. е. будем предполагать, что Земля, Луна, Солнце и тело нулевой массы движутся в одной плоскости.

Пусть GXY — абсолютная система координат с началом в центре масс Земли и Луны; ось GX направим в точки весеннего равноденствия.

[1] При построении аналитической теории движения Луны Лаплас таким же образом выбирал промежуточную орбиту [2].

Движение тела нулевой массы под действием притяжения Земли и Луны с учетом косвенного действия притяжения Солнца описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial X}, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial Y}, \tag{1}$$

где

$$W = f\left(\frac{m_1}{\Delta_1} + \frac{m_2}{\Delta_2}\right),$$

$$\Delta_1^2 = (X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2, \quad \Delta_2^2 = (X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2,$$

$$X_1 = -\frac{m_2}{m_1} X_2, \ Y_1 = -\frac{m_2}{m_1} Y_2, \ X_2 = r_2 \cos l, \ Y_2 = r_2 \sin l,$$

$$r_2 = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

m_1 и m_2 — массы Земли и Луны, f — гравитационная постоянная, v — истинная аномалия Земли и Луны, $l = \Omega + \omega + v$ — долгота Луны в орбите.

Здесь p, e, Ω и ω — общепринятые обозначения элементов орбиты Луны. Причем величины Ω и ω связаны с временем t зависимостями

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega} t, \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega} t,$$

где Ω_0, ω_0, $\dot{\Omega}$ и $\dot{\omega}$ — постоянные величины.

Отметим, что уравнения (1) учитывают только косвенное действие притяжения Солнца посредством величин Ω и ω, которые считаются известными. Прямое действие притяжения Солнца уравнения (1) не учитывают.

Сделаем замену переменных

$$X = \bar{r}(x \cos l - y \sin l), \quad Y = \bar{r}(x \sin l + y \cos l), \tag{2}$$

где

$$\bar{r} = \frac{1}{1 + e \cos v},$$

и, кроме того, вместо независимой переменной t введем новую независимую переменную v.

Такое преобразование координат является некоторым обобщением преобразования Нехвила [3] и переходит в последнее при

$$\Omega_0 = \omega_0 = \dot{\Omega} = \dot{\omega} = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем будем использовать такие единицы измерений, что $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu$, $p = 1$, $f = 1$.

При выполнении условия (3) уравнения движения имеют частные треугольные лагранжевы решения L_4 и L_5

$$x = \alpha = \frac{1 - 2\mu}{2}, \quad y = \beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,[1].$$

Введем систему координат с началом в точке либрации, т. е. осуществим перенос начала координат

$$\xi = x - \alpha, \quad \eta = y - \beta.$$

[1] Здесь и в дальнейшем у величин, имеющих двойной знак, верхний соответствует точке либрации L_4, нижний — L_5.

Тогда уравнения (1) преобразуются так:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{dv^2} - 2(1+m\bar{r}^2)\frac{d\eta}{dv} = \bar{r}\,\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\xi} + m\bar{r}^2(2+m\bar{r}^2)(\xi+\alpha) + \\
&\qquad + 2\bar{r}^3 em(\eta+\beta)\sin v, \\
&\frac{d^2\eta}{dv^2} + 2(1+m\bar{r}^2)\frac{d\xi}{dv} = \bar{r}\,\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\eta} - 2\bar{r}^3 em(\xi+\alpha)\sin v + \\
&\qquad + m\bar{r}^2(2+m\bar{r}^2)(\eta+\beta),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где

$$\bar{\Omega} = \bar{r}\,\frac{(\xi+\alpha)^2+(\eta+\beta)^2}{2} + \frac{1-\mu}{\Delta_1} + \frac{\mu}{\Delta_2},$$

$$\Delta_1^2 = (\xi-\xi_1)^2 + (\eta-\eta_1)^2, \quad \Delta_2^2 = (\xi-\xi_2)^2 + (\eta-\eta_2)^2,$$

$$\xi_1 = -\mu-\alpha, \quad \eta_1 = -\beta,$$

$$\xi_2 = 1-\mu-\alpha, \quad \eta_2 = -\beta,$$

$$m = \frac{1}{n}(\dot{\Omega}+\dot{\omega}), \quad n = (1-e^2)^{3/2}.$$

При $m=0$ уравнения (4) описывают движение тела нулевой массы в ограниченной задаче трех тел.

§ 2. Уравнения в вариациях и метод их решения

Уравнения в вариациях рассматриваемой задачи представим в матричном виде. Для этого введем новые переменные

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \eta, \quad x_3 = \frac{d\xi}{dv}, \quad x_4 = \frac{d\eta}{dv}$$

и обозначим

$$P = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4}\bar{r} & \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\bar{r} & 0 & 2 \\ \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu)\bar{r} & \frac{9}{4}\bar{r} & -2 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$Q = 2\bar{r}^2 \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \bar{r}e\sin v & 0 & 1 \\ -\bar{r}e\sin v & 1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$q = 2\bar{r}^2 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \alpha + \bar{r}e\beta\sin v \\ -\bar{r}e\alpha\sin v + \beta \end{matrix} \right\|, \qquad x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \right\|.$$

Тогда уравнения в вариациях запишутся в виде

$$\frac{dx}{dv} = Px + mQx + mq, \tag{5}$$

где сохранены только члены первого порядка относительно малого параметра m.

Уравнение (5) представляет собой систему четырех скалярных линейных дифференциальных неоднородных уравнений с периодическими коэффициентами. Решение этого уравнения будем искать в виде

$$x = x^{(0)} + mx^{(1)} + m^2 x^{(2)} + \ldots .$$

Для последовательного определения коэффициентов этого ряда получим системы уравнений

$$\frac{dx^{(0)}}{dv} = Px^{(0)},$$

$$\frac{dx^{(1)}}{dv} = Px^{(1)} + Qx^{(0)} + q,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Величины $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ в свою очередь будем искать в виде рядов

$$x^{(0)} = x^{(00)} + \varepsilon x^{(01)} + \varepsilon^2 x^{(02)} + \ldots,$$

$$x^{(1)} = x^{(10)} + \varepsilon x^{(11)} + \varepsilon^2 x^{(12)} + \ldots, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{1-e^2}-1}{e}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Величины $x^{(00)}$, $x^{(01)}$ и $x^{(02)}$ определены в [4]. Расчеты, проведенные в [4], показали, что в $x^{(0)}$ с достаточной степенью точности можно ограничиться членами первого порядка относительно ε, т. е. считать $x^{(0)} \approx x^{(00)} + \varepsilon x^{(01)}$. Тогда, рассматривая параметры ε и m в качестве малых одинакового порядка малости, с той же степенью точности можем принять $x^{(1)} \approx x^{(10)}$, и, следовательно,

$$x \approx x^{(00)} + \varepsilon x^{(01)} + mx^{(10)}. \tag{6}$$

Для определения величины $x^{(10)}$ из (5) получим

$$\frac{dx^{(10)}}{dv} = P^{(0)} x^{(10)} + Q^{(0)} x^{(00)} + q^{(0)}, \tag{7}$$

где $P^{(0)}$, $Q^{(0)}$ и $q^{(0)}$ — первые члены разложения матриц P, Q и q в ряды Фурье, а именно,

$$P^{(0)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_{xx} & V_{xy} & 0 & 2 \\ V_{xy} & V_{yy} & -2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad q^{(0)} = \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{Vmatrix},$$

$$Q^{(0)} = \frac{2}{(1-e^2)^{3/2}} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad V_{xx} = \frac{3}{4\sqrt{1-e^2}}, \quad V_{yy} = \frac{9}{4\sqrt{1-e^2}},$$

$$V_{xy} = \pm \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4\sqrt{1-e^2}}.$$

Уравнение (7) представляет собой систему четырех линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Причем неоднородная часть имеет вид

$$Q^{(0)}x^{(00)} + q^{(0)} = A_0 + \sum_{k=1}^{2} (A_k \cos \Lambda_k v + B_k \sin \Lambda_k v)\, C,$$

где Λ_1 и Λ_2 — фундаментальные частоты, C — матрица — столбец произвольных постоянных, $A_0 = q^{(0)}$, A_k и B_k — известные постоянные матрицы четвертого порядка, легко определяемые по матрице $Q^{(0)}$ и величине $x^{(00)}$, приведенной в [4].

§ 3. Окончательные формулы и оценки

Поскольку общее решение однородной части уравнения (7) известно из [4], то для получения общего решения уравнения (7) достаточно найти какое-либо частное решение этого неоднородного уравнения.

Будем искать частное решение уравнения (7) в виде

$$x^{(10)} = a_0 + \sum_{k=1}^{2} (K_k \cos \Lambda_k v + L_k \sin \Lambda_k v + M_k v \cos \Lambda_k v + N_k v \sin \Lambda_k v)\, C$$

Для отыскания неопределенных коэффициентов получим системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} P^{(0)} a_0 = A_0, \\ -P^{(0)} K_k + \Lambda_k L_k + M_k = A_k, \\ -\Lambda_k K_k - P^{(0)} L_k + N_k = B_k, \\ P^{(0)} M_k - \Lambda_k N_k = 0, \\ \Lambda_k M_k + P^{(0)} N_k = 0. \end{gathered}$$

Из этой системы однозначно определяются матрицы a_0, L_k, M_k, N_k, и две последние строки матрицы K_k, а восемь элементов двух первых строк матрицы K_k могут быть выбраны произвольно. Полагая эти элементы для простоты равными нулю, получим следующие значения матриц K_k, L_k, M_k и N_k:

$$K_k = \Lambda_k^2 g_k \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2-k)\,4V_{xy} & (2-k)\,f_{2k} & (k-1)\,4V_{xy} & (k-1)\,f_{2k} \\ (2-k)\,f_{1k} & (2-k)\,\Lambda_k V_{xy}(\varphi + 2\Lambda_k^2) & (k-1)\,f_{1k} & (k-1)\,\Lambda_k V_{xy}(\varphi + 2\Lambda_k^2) \end{Vmatrix},$$

$$L_k = g_k \begin{Vmatrix} 0 & (2-k)\,f_{6k} & 0 & (k-1)\,f_{6k} \\ (2-k)\,f_{3k} & (2-k)\,f_{7k} & (k-1)\,f_{3k} & (k-1)\,f_{7k} \\ (2-k)\,\Lambda_k f_{4k} & 0 & (k-1)\,\Lambda_k f_{4k} & 0 \\ (2-k)\,\Lambda_k f_{5k} & (2-k)\,2\Lambda_k^2 f_{8k} & (k-1)\,\Lambda_k f_{5k} & (k-1)\,2\Lambda_k^2 f_{8k} \end{Vmatrix},$$

$$M_k = \Lambda_k g_k \begin{Vmatrix} (2-k)\,4\Lambda_k V_{xy} & -(2-k)\,f_{10k} & (k-1)\,4\Lambda_k V_{xy} & -(k-1)\,f_{10k} \\ (2-k)\,f_{9k} & (2-k)\,V_{xy} f_{8k} & (k-1)\,f_{9k} & (k-1)\,V_{xy} f_{8k} \\ (2-k)\,\Lambda_k f_{4k} & 0 & (k-1)\,\Lambda_k f_{4k} & 0 \\ (2-k)\,\Lambda_k f_{5k} & (2-k)\,2\Lambda_k^2 f_{8k} & (k-1)\,\Lambda_k f_{5k} & (k-1)\,2\Lambda_k^2 f_{8k} \end{Vmatrix},$$

$$N_k = \Lambda_k g_k \begin{Vmatrix} (2-k)f_{4k} & 0 & (k-1)f_{4k} & 0 \\ (2-k)f_{5k} & (2-k)2\Lambda_k f_{8k} & (k-1)f_{5k} & (k-1)2\Lambda_k f_{8k} \\ -(2-k)4\Lambda_k^2 V_{xy} & (2-k)\Lambda_k f_{10k} & -(k-1)4\Lambda_k^2 V_{xy} & (k-1)\Lambda_k f_{10k} \\ -(2-k)\Lambda_k f_{9k} & -(2-k)\Lambda_k V_{xy} f_{8k} & -(k-1)\Lambda_k f_{9k} & -(k-1)\Lambda_k V_{xy} f_{8k} \end{Vmatrix},$$

где

$$g_k = \frac{1}{\Lambda_k^2 (1-e^2)^{3/2} (\varphi + 2\Lambda_k^2)}, \quad \varphi = V_{xx} + V_{yy} - 4,$$

$$f_{1k} = -2\Lambda_k^2 (\varphi + 2\Lambda_k^2) + 4 (V_{yy} - \Lambda_k^2),$$

$$f_{2k} = -\Lambda_k [(V_{yy} + \Lambda_k^2 - 2)^2 + V_{xy}^2 - 4\Lambda_k^2 + 4],$$

$$f_{3k} = 2\Lambda_k (1 - \Lambda_k^2) (\varphi + 2\Lambda_k^2 + 4),$$

$$f_{4k} = (V_{yy} + \Lambda_k^2)^2 + V_{xy}^2 - 4\Lambda_k^2, \ f_{5k} = -V_{xy} (\varphi + 2\Lambda_k^2 + 4),$$

$$f_{6k} = -\Lambda_k^2 (V_{yy} + \Lambda_k^2 - 2)^2 - \Lambda_k^2 V_{xy}^2 + (V_{yy} - \Lambda_k^2)^2 + V_{xy}^2,$$

$$f_{7k} = V_{xy} [\Lambda_k^2 (\varphi + 2\Lambda_k^2) - f_{8k}], \ f_{8k} = \varphi - 2\Lambda_k^2 + 4,$$

$$f_{9k} = 2\Lambda_k (V_{yy} - V_{xx}), \ f_{10k} = (V_{yy} + \Lambda_k^2) f_{8k}.$$

Компоненты матрицы — столбца a_0 имеют значения: $0, \mp 4 \sqrt{3}/9\,(1-e^2), 0, 0$ или $0, \mp 0{,}7721, 0, 0$.

Приведенные формулы полностью определяют общее решение уравнений (5) в виде (6).

Напомним, что эти формулы описывают движение тела нулевой массы в окрестности треугольных точек либрации системы Земля — Луна с учетом только косвенного действия притяжения Солнца. Если в решение (6) ввести возмущения первого порядка от прямого действия притяжения Солнца (согласно [1]), то решение можно записать в виде

$$x \approx x^{(00)} + \varepsilon x^{(01)} + m x^{(10)} + \nu x^{(s1)}, \tag{8}$$

где ν — некоторый малый параметр, характеризующий прямое действие притяжения Солнца.

Для системы Земля — Луна — Солнце используемые параметры имеют следующие значения [5, 6]:

$$e = 0{,}0549005, \quad \mu = 0{,}0121168 \ ((1-\mu)/\mu = 81{,}53),$$

$$m = 0{,}0084548\,(\dot\Omega + \dot\omega = 0{,}111404 \text{ град/сутки}), \ \nu = 0{,}0055303.$$

Используя эти значения параметров, для матриц K_k, L_k, M_k и N_k $(k=1, 2)$ получим значения

$$K_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 6{,}2468 & 1{,}9762 & 0 & 0 \\ -10{,}8280 & \pm 0{,}3814 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad K_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 6{,}2468 & -3{,}9013 \\ 0 & 0 & 4{,}8098 & \pm 1{,}2138 \end{Vmatrix},$$

$$L_1 = \begin{Vmatrix} 0 & -84{,}4383 & 0 & 0 \\ -23{,}8460 & \pm 50{,}6086 & 0 & 0 \\ -27{,}7345 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 16{,}6228 & -6{,}9521 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad L_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1{,}0169 \\ 0 & 0 & 1{,}1700 & \mp 0{,}7802 \\ 0 & 0 & 10{,}2998 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 7{,}9025 & 2{,}9340 \end{Vmatrix}.$$

$$M_1 = \begin{Vmatrix} \mp 6{,}2468 & 27{,}2299 & 0 & 0 \\ -3{,}6961 & \mp 14{,}7545 & 0 & 0 \\ -8{,}2948 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 4{,}9715 & -\ 2{,}0792 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad M_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \pm 6{,}2468 & -4{,}8693 \\ 0 & 0 & 3{,}6961 & \mp 1{,}9565 \\ 0 & 0 & 9{,}8039 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 7{,}5220 & 2{,}7927 \end{Vmatrix},$$

$$N_1 = \begin{Vmatrix} -27{,}7345 & 0 & 0 & 0 \\ \pm\ 16{,}6228 & -6{,}9521 & 0 & 0 \\ \pm\ 1{,}8683 & -8{,}1439 & 0 & 0 \\ 1{,}1054 & \pm 4{,}4128 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad N_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 10{,}2998 & 0 \\ 0 & 0 & \mp\ 7{,}9025 & 2{,}9340 \\ 0 & 0 & \mp\ 5{,}9460 & 4{,}6348 \\ 0 & 0 & -\ 3{,}5182 & \mp 1{,}8622 \end{Vmatrix}.$$

Приведенные числовые значения матриц позволяют достаточно просто учитывать косвенное действие притяжения Солнца при вычислении траекторий движения тела нулевой массы вблизи треугольной точки либрации системы Земля — Луна.

Кроме того, приведенные числовые значения позволяют оценить величину $mx^{(10)}$ в формуле (8). Такая оценка показывает, что косвенное действие притяжения Солнца производит значительные возмущения в движении тела нулевой массы. Так, для интервала времени, равного одному месяцу, величина $mx^{(10)}$ имеет одинаковый порядок с величиной $x^{(00)}+\varepsilon x^{(01)}+\nu x^{(s1)}$. Следовательно, при исследовании движения тела нулевой массы вблизи треугольных точек либрации системы Земля — Луна необходимо учитывать не только прямое действие притяжения Солнца, но и косвенное.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лукьянов Л. Г. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 1, 1969.
2. Субботин М. Ф Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, Л.—М., 1937.
3. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
4. Лукьянов Л. Г. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 2, 1968.
5. Чеботарев Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики. М., «Наука», 1964.
6. Астрономический ежегодник на 1968 г.

Поступила в редакцию
30.1 1969 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии