Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1969

УДК 538.566

Д. В. ГАЛЬЦОВ

ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ ЭЛЕКТРОНАМИ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ ТИПА МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ

Показана возможность отрицательного поглощения в системе электронов, находящихся в неоднородном магнитном поле типа магнитной ловушки. Вычислена мощность отрицательного поглощения.

Отрицательное поглощение электронами, движущимися в однородном магнитном поле, в настоящее время хорошо изучено [1—4]. Эффект усиления, возникающий в этой системе, обусловлен релятивистской зависимостью массы от скорости или, с квантовой точки зрения, слабой (порядка $\hbar$) неэквидистантностью энергетического спектра [4]. В неоднородном магнитном поле либо в скрещенных полях эффект усиления существует уже в нерелятивистской области [5—7]. Это специфическое явление для системы осцилляторов с несколькими степенями свободы. Использование таких осцилляторов может представить известные преимущества по двум причинам: во-первых, ввиду некритичности эффекта усиления к расстройке внешней частоты относительно резонансной частоты переходов, во-вторых, ввиду возможности увеличить коэффициент усиления.

Так для скрещенных полей типа [6—7] отдаваемая волне мощность в $\frac{1-\delta}{2\delta}$ $(0<\delta<1)$ раза больше, чем в случае однородного магнитного поля [1] при тех же энергиях частицы.

Здесь рассматривается другой случай осцилляторов с несколькими степенями свободы, который легко может быть осуществлен экспериментально — электроны в адиабатической магнитной ловушке, задаваемой вектор-потенциалом

$$A_r = A_z = 0; \quad A_\varphi = \frac{rB_0}{2}\left(1 + \frac{z^2}{\Delta^2}\right). \tag{1}$$

Вектор-потенциалу (1) соответствуют следующие значения для компонентов поля:

$$H_x = -B_0\frac{xz}{\Delta^2}; \quad H_y = -B_0\frac{yz}{\Delta^2}; \quad H_z = B_0\left(1 + \frac{z^2}{\Delta^2}\right). \tag{2}$$

В поле такой конфигурации частицы совершают конечное движение, двигаясь по винтовой траектории с переменным радиусом и шагом. Мы будем исследовать нерелятивистский случай, когда продольный размер области движения (амплитуда z-колебаний) достаточно мал по сравнению с параметром неоднородности поля Δ, т. е. $z_0/\Delta \ll 1$. Как видно из (2), в этом случае поперечные компоненты поля малы по сравнению с продольной.

Поставим задачу определить мощность индуцированного излучения данной системы в дипольном приближении. Общая формула для мощности излучения может быть получена обобщением метода [8] на случай колебаний с несколькими степенями свободы. Суть метода [8] сводится к введению таких канонических переменных, когда невозмущенный гамильтониан содержит лишь канонические импульсы и не зависит от сопряженных координат. Для системы, совершающей конечное движение, такими переменными являются действие — угол [9, 10]. Гамильтониан полной системы (включая электромагнитные волны) в дипольном приближении может быть записан в виде

$$H = H_0 + H_I; \quad H_0 = \left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}_c\right)^2 \frac{1}{2m};$$

$$H_I = -\frac{e}{mc}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}_c\right)\vec{A}_\omega; \quad \vec{A}_\omega = \sum_\mu a_\mu \vec{e}_\mu \cos(\omega_\mu t + \varphi_\mu). \tag{3}$$

В нулевом по H_I приближении решения уравнений Гамильтона в переменных действие — угол, очевидно, имеют вид [10]

$$I_i^{(0)} = \text{const}; \quad w_{(0)}^i = \Omega_i t + \delta_i; \quad \Omega = \frac{\partial H_0}{\partial I_i^{(0)}}. \tag{4}$$

Отметим, что фактически мы имеем дело не с одной частицей, а с ансамблем частиц, фазовые положения которых неопределенны (в нулевом приближении). Это означает, что в окончательном результате следует усреднить по δ_i.

В первом по H_I приближении получим

$$I_i^{(1)}(t) = -\int_0^t \frac{\partial H_I(t')}{\partial w_i^{(0)}}\, dt'; \quad w_i^{(1)}(t) = \int_0^t \frac{\partial H(t)}{\partial I_i^{(0)}} - w_i^{(0)}(t). \tag{5}$$

Переходя к декартовым координатам

$$\vec{r}^{(1)} = \hat{L}\vec{r}^{(0)}; \quad \hat{L} = \sum_i \left(I_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial I_i} + w_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial w_i}\right), \tag{6}$$

найдем следующее выражение для мощности дипольного индуцированного излучения:

$$dP_{\text{инд}} = \frac{e}{c}\langle \dot{\vec{r}}^{(1)}\vec{A}_\omega\rangle_{\delta_i \varphi_\mu} = -\frac{4\pi e^2}{\omega c} \lim_{T\to\infty} \int_0^T dt \int_0^t dt' \times$$

$$\times \sum_\lambda \Big[\sin\omega(t'-t) \cdot \langle\{\vec{e}_\lambda \dot{\vec{r}}^{(0)}(t);\ \vec{e}_\lambda \dot{\vec{r}}^{(0)}(t')\}\rangle +$$

$$+ \frac{\partial \Omega_i}{\partial I_j} \int_0^{t'} \sin\omega(t''-t) \left\langle \frac{\partial}{\partial w_j} \vec{e}_\lambda \dot{\vec{r}}^{(0)}(t'') \frac{\partial}{\partial w_i} \vec{e}_\lambda \dot{\vec{r}}^{(0)}(t) \right\rangle \Big] I_{\vec{k}\lambda}\, d\omega dO. \tag{7}$$

Здесь фигурные скобки означают классические скобки Пуассона, $I_{\vec{k}\lambda}$ — спектральная плотность интенсивности, λ — индекс поляризации, по повторяющимся индексам i, j подразумевается суммирование.

Обратимся к определению траектории движения частицы в поле (1). Как мы уже заметили, радиус винтовой траектории меняется при перемещении частицы вдоль оси z. В положении $z=0$ электрон, обладающий моментом количества движения P_φ, вращается по окружности радиуса $r_0=(2cP_\varphi/e_0B_0)^{1/2}$; при $z\neq 0$ радиус вращения r запишем в виде $r=r_0(1+\xi)$. Ввиду слабой неоднородности поля в области движения естественно предполагать, что радиус вращения меняется мало, т. е. $\xi\ll 1$; мы увидим ниже, что это находится в хорошем согласии с условием $z_0/\Delta\ll 1$. Уравнение Гамильтона—Якоби в переменных ξ, φ, z, очевидно будет иметь вид

$$2mE=\frac{1}{r_0^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\frac{2}{r_0^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\left(1+\xi^2+\frac{z^2}{\Delta^2}\right). \tag{8}$$

Его решение, выраженное через I_ξ, I_φ, I_z; ξ, φ, z, запишем в следующей форме:

$$S=\varphi\cdot I_\varphi+I_z\left(\frac{z}{z_0}\sqrt{1-\frac{z^2}{z_0^2}}+\arcsin\frac{z}{z_0}\right)+I_\xi\left(\frac{\xi}{\xi_0}\sqrt{1-\frac{\xi^2}{\xi_0^2}}+\arcsin\frac{\xi}{\xi_0}\right);\quad z_0=(r_0\Delta I_z/I_\varphi)^{1/2};\quad \xi_0=(I_\xi/I_\varphi)^{1/2}. \tag{9}$$

Мы видим, что условие $\xi_0\ll 1$ означает малую степень возбуждения радиальных колебаний и совместно с условием $\frac{z_0}{\Delta}\ll 1$. Теперь можно выразить координаты через угловые переменные w_ξ, w_φ, w_z согласно соотношениям $w_i=\partial S/\partial I_i$:

$$\begin{gathered}\xi=\xi_0\sin w_\xi;\quad \varphi=w_\varphi-\frac{I_z}{4I_\varphi}\sin 2w_z-\frac{I_\xi}{2I_\varphi}\sin 2w_\xi;\\ z=z_0\sin w_z;\quad w_i=\Omega_i t+\delta_i,\end{gathered} \tag{10}$$

где частоты Ω_i равны:

$$\Omega_\xi=\omega_B;\quad \Omega_\varphi=\omega_B\left(1+\frac{r_0I_z}{2\Delta I_\varphi}\right);\quad \Omega_z=\omega_B\frac{r_0}{\Delta}. \tag{11}$$

Согласно сделанным выше предположениям

$$\omega_B=\Omega_\xi\approx\Omega_\varphi,\ \text{так как}\ r_0I_z/2\Delta I_\varphi=z_0^2/2\Delta^2\ll 1. \tag{12}$$

Сопоставляя выражение для Ω_z с условием (12), можно сделать вывод о допустимых в рамках сделанных ограничений значениях отношения I_z/I_φ. Именно при $\Omega_z\approx\omega_B$ отношение I_z/I_φ должно быть мало, в случае же $\Omega_z\ll\omega_B\,(r_0\lll\Delta)$ это отношение может быть порядка единицы и выше.

Из формул (10) следует, что «фазовое» движение слагается из трех частей: равномерного движения со «скоростью» Ω_φ, фазовых колебаний, обязанных аксиальным (с частотой $2\Omega_z$), и фазовых колебаний частоты $2\omega_B$, связанных с радиальными колебаниями. Амплитуда фазово-радиальных колебаний мала, что дает нам право разлагать по ней в ряд. Амплитуда фазово-аксиальных колебаний, равная $I_z/4I_\varphi$, не обязательно мала, как было отмечено выше. По этой причине мы не можем вести разложения по амплитуде фазово-аксиальных колебаний и должны учитывать эту часть фазового движения точно.

Чтобы выяснить, какие из резонансных частот системы наиболее существенны при взаимодействии с переменным полем, запишем с учетом вышесказанного явное выражение для комплексной координаты поперечного движения:

$$x + iy = re^{i\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_0 J_n (I_z/4I_\varphi)\Big\{\exp i (w_\varphi - 2nw_z) +$$
$$+ \frac{\xi_0}{2i}[\exp i (w_\varphi - 2nw_z + w_\xi) - \exp i (w_\varphi - 2nw_z - w_\xi)] -$$
$$- \frac{\xi_0^2}{4}[\exp i (w_\varphi - 2nw_z + 2w_\xi) - \exp i (w_\varphi - 2nw_z - 2w_\varepsilon)] + \ldots\Big\}. \quad (13)$$

Из этой записи видно, что наибольший вклад в мощность излучения может дать «главная серия» резонансов на частотах

$$\omega_n = \Omega_\varphi - 2n\Omega_z. \quad (14)$$

Перейдем теперь к вычислению $P_{инд}$ на этих частотах. При этом всюду будем отбрасывать квадраты и более высокие степени малых величин ξ_0 и z_0/Δ. Поскольку в формулу (13) входят лишь квадратичные комбинации $\vec{r}^{(0)}$, очевидно достаточно сохранить в сумме лишь первый член. Пусть падающая волна поляризована вдоль оси y, т. е. единичный вектор $\vec{e}_\lambda$ в (7) имеет вид $\vec{e} = \{0, 1, 0\}$. Подставляя (13) в (7) и производя все необходимые усреднения, получим

$$dP_{инд} = -\frac{4\pi^3 e^2}{\omega c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{\widehat{D}_n (r_0 J_n(\eta)\,\omega_n)^2 [\delta(\omega - \omega_n) - \delta(\omega + \omega_n)] -$$
$$- (r_0 J_n(\eta)\,\omega_n)^2 (\widehat{D}_n \omega_n)[\delta'(\omega - \omega_n) + \delta'(\omega + \omega_n)]\}\, I(\omega)\, d\omega; \quad (15)$$
$$\widehat{D}_n = \frac{\partial}{\partial I_\varphi} - 2n\frac{\partial}{\partial I_z}; \quad \eta = \frac{I_z}{4I_\varphi}; \quad J_n \text{ — функции Бесселя.}$$

Количество слагаемых в сумме по n определяется эффективной шириной Δ_ω спектральной функции $I(\omega)$ по отношению к разности $\omega_n - \omega_{n-1} = 2\omega_B r_0/\Delta$. Интегрируя (15) по ω, получим для мощности индуцированного излучения n-гармоники выражение

$$P_n = -\frac{4\pi^3 e^2}{c}\widehat{D}_n [r_0^2 \omega_n J_n^2(\eta)\, I(|\omega_n|)]. \quad (16)$$

Здесь производную от спектральной плотности нужно понимать в следующем смысле:

$$\widehat{D}_n I(|\omega_n|) = \frac{\partial I}{\partial \omega}\Big|_{\omega=|\omega_n|}(\widehat{D}_n \omega_n)\,\mathrm{sign}\,\omega_n. \quad (17)$$

Займемся исследованием знака выражения (16). Выполняя все необходимые дифференцирования, мы придем к следующему выражению:

$$P_n = -\frac{8\pi^3 e^2}{mc} J_n^2(\eta)\left\{\left[1 - 4n\frac{r_0}{\Delta} - \frac{1}{2}\frac{\omega_n}{\omega_B}\frac{J_n'}{J_n}\left(2n + \frac{I_z}{I_\varphi}\right)\right] \times \right.$$

$$\left. \times I(|\omega_n|) - |\omega_n| \frac{\partial I}{\partial\omega}\bigg|_{|\omega_n|} \frac{r_0}{\Delta}(2n + \eta)\right\}. \tag{18}$$

Напомним, что пределом применимости этой формулы является условие

$$\frac{r_0 I_z}{\Delta I_\varphi} \ll 1. \tag{19}$$

Этот малый параметр очевидно представляет произведение отношения r_0/Δ, характеризующего степень неоднородности поля, и отношения I_z/I_φ, характеризующего относительную степень возбуждения аксиальных колебаний. Дальнейший анализ формулы (18) проведем поэтому отдельно для двух случаев: а) $I_z/I_\varphi \ll 1$, $\frac{r_0}{\Delta}$ произвольно в пределах выполнения неравенства (19); б) $r_0/\Delta \ll 1$, I_z/I_φ произвольно в тех же пределах.

В случае а) P_n заметно отлична от нуля лишь для $n=0, \pm 1$, поскольку аргумент бесселевых функций мал. Вместо J_n можно воспользоваться первым членом разложения в ряд $J_n(\eta) \simeq (n!)^{-1}(\eta/2)^n$. Тогда для нулевой гармоники $(\omega_0 = \Omega_\varphi)$ запишем

$$P_0 = -\frac{8\pi^3 e^2}{mc}\left(I(\Omega_\varphi) - \Omega_\varphi \frac{r_0 I_z}{4\Delta I_\varphi}\frac{\partial I}{\partial\omega}\bigg|_{\Omega_\varphi}\right). \tag{20}$$

В силу условия $z_0 \ll \Delta$ влияние производной от спектральной функции несущественно и мы приходим к известной формуле для циклотронного поглощения.

Для гармоник $n = \pm 1$ в том же приближении получим:

$$\begin{gathered} P_{+1} = +\frac{8\pi^3 e^2}{mc}\frac{I_z}{I_\varphi}\left\{\left[\left(1 - 2\frac{r_0}{\Delta}\right) + \eta\left(1 + 2\frac{r_0}{\Delta}\right)\right] I(\omega_1) + \right. \\ \left. + 2\eta\frac{r_0}{\Delta}\omega_1\frac{\partial I}{\partial\omega}\bigg|_{\omega_1}\right\}, \\ P_{-1} = -\frac{8\pi^3 e^2}{mc}\frac{I_z}{I_\varphi}\left\{\left[\left(1 + 2\frac{r_0}{\Delta}\right) - \eta\left(1 - 2\frac{r_0}{\Delta}\right)\right] I(\omega_{-1}) + \right. \\ \left. + 2\eta\frac{r_0}{\Delta}\omega_{-1}\frac{\partial I}{\partial\omega}\bigg|_{\omega_{-1}}\right. . \end{gathered} \tag{21}$$

Как и в предыдущем случае, влияние производной $\partial I/\partial\omega$ не существенно. Легко видеть, что для $n = -1$ имеет место поглощение при любом значении отношения r_0/Δ. На первой гармонике мощность излучения становится положительной при выполнении условия

$$\Delta > 2r_0. \tag{22}$$

Частота $\omega_1 \simeq \omega_B(1 - 2r_0/\Delta)$ таким образом усиливается при этом условии, однако следует отметить, что эффект усиления в I_z/I_φ раз менее интенсивен, чем поглощение на циклотронной частоте.

Больший практический интерес представляет случай сильного возбуждения z-колебаний, т. е. случай б). Резонансные частоты ω_n теперь расположены весьма тесно друг от друга:

$$\omega_n = \omega_B\left(1 + \frac{r_0}{\Delta} + \frac{r_0}{\Delta}\frac{I_z}{2I_\varphi} - 2n\frac{r_0}{\Delta}\right). \tag{23}$$

Для выделения отдельной гармоники нужно иметь узкую спектральную функцию $\Delta_\omega < \omega_B r_0/\Delta$. Из формулы (18) получим общее условие усиления на n-й гармонике:

$$1 - 4n\frac{r_0}{\Delta} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r_0}{\Delta}(1 - 2n + 2\eta)\right)\left(2n + \frac{I_z}{I_\varphi}\right)\frac{J_n J_n'}{J_n^2} -$$
$$- \frac{\omega_B r_0}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\omega}\ln I(\omega)|_{\omega=|\omega_n|}(2n + \eta) < 0. \tag{24}$$

Учитывая, что функции J_n заметно отличны от нуля, когда аргумент становится порядка индекса ($n \geqslant 1$), можем заключить, что наибольший интерес представляют $n \sim \eta$ (если $\eta > 1$). Совместно с условием (19) это означает, что $r_0 n/\Delta \leqslant 1$.

Неравенство (24) можно, таким образом, упростить:

$$1 - (n + 2\eta)\frac{J_n' J_n}{J_n^2} + (2n + \eta)\frac{\omega_B r_0}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\omega}\ln I(\omega) < 0. \tag{25}$$

Наконец, если максимум спектральной плотности $I(\omega)$ находится не слишком далеко от резонанса, можно пренебречь последним членом в (25) и условие усиления принимает вид

$$J_n(\eta)\,(J_n(\eta) - (n + 2\eta)\,J_n'(\eta)) < 0. \tag{26}$$

Поскольку $J_n(\eta)$ — осциллирующая функция, для каждой гармоники n найдется целая серия интервалов — зон отрицательного поглощения — где это неравенство выполняется. Физически это означает, что некоторая наперед заданная гармоника n может усиливаться лишь при определенном (в некотором интервале) значении отношения продольной и поперечной энергии I_z/I_φ. Для нахождения зон поглощения обозначим корни уравнения

$$J_n(\eta) - (n + 2\eta)\,J_n'(\eta) = 0 \tag{27}$$

через $\tilde{\eta}_{n,s}$; $s = 1, 2\ldots$. Кроме того, обозначим корни бесселевой функции $J_n(\eta)$ через $\eta_{n,s}$, и корни производной $J_n'(\eta)$ через $\eta_{n,s}'$. Известно соотношение [11]: $\eta_{n,1} > \eta_{n,1}' > n$, $(n > 0)$. Это означает, что в интервале $[0, \eta_{n,1}]$ J_n растет, J_n' убывает от максимального значения до нуля. Нетрудно сообразить, что первый корень уравнения (27) лежит слева от $\eta_{n,1}'$. Поскольку в этой области $J_n(\eta) > 0$, то первая зона усиления задается неравенством

$$0 < \eta < \tilde{\eta}_{n,1}. \tag{28}$$

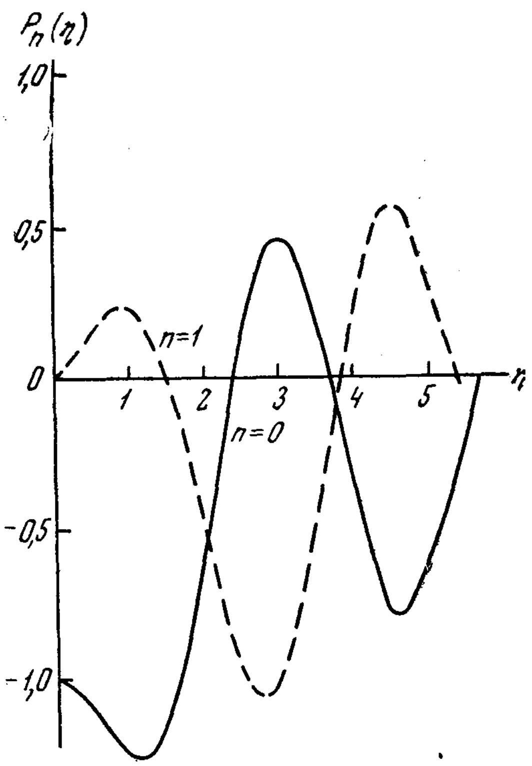
Второй корень уравнения (31) заключен между $\eta_{n,1} < \tilde{\eta}_{n,2} < \eta_{n,2}$. Учитывая, что при $\eta_{n,1} < \eta < \eta_{n,2}$; $J_n < 0$, получаем неравенство, определяющее вторую зону усиления

$$\eta_{n,1} < \eta < \tilde{\eta}_{n,2} \tag{29}$$

и т. д. Случай $n=0$ должен быть рассмотрен особо. Условие усиления для $n=0$ принимает простой вид

$$(2\eta I_1(\eta) - J_0(\eta))\, J_0(\eta) > 0. \tag{30}$$

Легко видеть, что решение этого неравенства также состоит из бесконечного числа зон, определяющих необходимое для возникновения отрицательного поглощения соотношение продольной и поперечной энергии. Качественно ход кривой, изображающей мощность индуцированного излучения в зависимости от η в области первых зон усиления представлен на рисунке.



Кривые мощности индуцированного излучения в окрестности первых зон усиления. $\eta = \frac{I_z}{4I_\varphi}$

Таким образом показано, что в данной системе отрицательное поглощение возникает уже в нерелятивистском случае для целого набора гармоник собственных частот. Практический интерес может представлять случай сильного возбуждения фазово-аксиальных колебаний. Как мы видели, характеристикой этих колебаний служит отношение I_z/I_φ, иначе говоря, отношение продольной и поперечной энергий частиц, которое может варьироваться, например, подбором начальных условий (угла влета частиц по отношению к магнитному полю). При этом усиление данной гармоники n возможно, если отношение продольной и поперечной энергий лежит в определенных интервалах значений, задаваемых условиями типа (28), (29).

Автор благодарит проф. А. А. Соколова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schneider J. Phys. Rev. Lett., **2**, 504, 1958.
2. Гапонов А. В. «Изв. вузов», радиофизика, **2**, 450, 836, 1959; ЖЭТФ, **39**, 326, 1960.
3. Соколов А. А., Тернов И. М. ДАН СССР, **166**, 1332, 1966; Письма в ЖЭТФ, **4**, 90, 1966.
4. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. «Изв. вузов», радиофизика, **10**, 1414, 1967.
5. Гальцов Д. В., Жуковский В. Ч. и др. «Изв. вузов», радиофизика, **10**, 734, 1967.
6. Соколов А. А., Павленко Ю. Г. Письма в ЖЭТФ, **2**, 449, 1965.
7. Павленко Ю. Г., Гальцов Д. В. «Изв. вузов», радиофизика, **9**, 1232, 1966.
8. Собельман И. И., Тютин И. В. «Успехи физич. наук», **79**, 595, 1963.
9 Борн М. Лекции по атомной механике. М.— Л., ОНТИ, 1934.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Классическая механика. М., Физматгиз, 1963.
11. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
13.12 1968 г.

Кафедра
теоретической физики