

УДК 533.9

ВО ХОНГ АНЬ

**РАВНОВЕСНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПЛАЗМЫ
В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ ВБЛИЗИ НЕЙТРАЛЬНОЙ ТОЧКИ (II)**

Приводится решение задачи о равновесной конфигурации диамагнитной плазмы изотропного давления в неоднородных магнитных полях с комплексным потенциалом типа $W \sim z^n$, $n=2$. Определяется форма плазменной конфигурации для случая, когда область плазмы не включает нейтральную точку (граница области совпадает с частью силовой линии $\psi_0 \neq 0$). Исследованы случаи больших и малых давлений плазмы. Обсуждается возможность перехода при $\psi_0=0$ к случаю, когда плазма переходит в область нейтральной точки, где поле $\vec{B}=0$. Задача решается методом отображений, описанным в [1].

В предыдущей статье [1] было изложено решение задачи о равновесной конфигурации плазмы в магнитных полях вблизи нейтральной точки для случая, когда область плазмы включает нейтральную точку и поэтому имеет границу, совпадающую с частью силовой линии $\psi_0=0$. В настоящей заметке рассматривается случай, когда плазма занимает в каждом секторе магнитного поля область, ограниченную силовой линией $\psi_0 \neq 0$.

По-прежнему, ввиду симметрии задачи, ограничиваемся лишь рассмотрением угла $(0-2\pi/n)$, который содержит два сектора силовых линий, разделенных асимптотой, проходящей через нейтральную точку. Как было показано в [1], в этом случае области, занятые плазмой в плоскости безразмерной переменной $\xi = \left(\frac{\vec{B}^*}{B_s}\right)^{n/n-1}$, отображаются уже не на круг, а на дужки единичной окружности, расположенные симметрично относительно оси абсцисс. Картина магнитного поля в присутствии плазмы и отображение ее в плоскости ξ для случая $n=2$ показаны на рисунке.

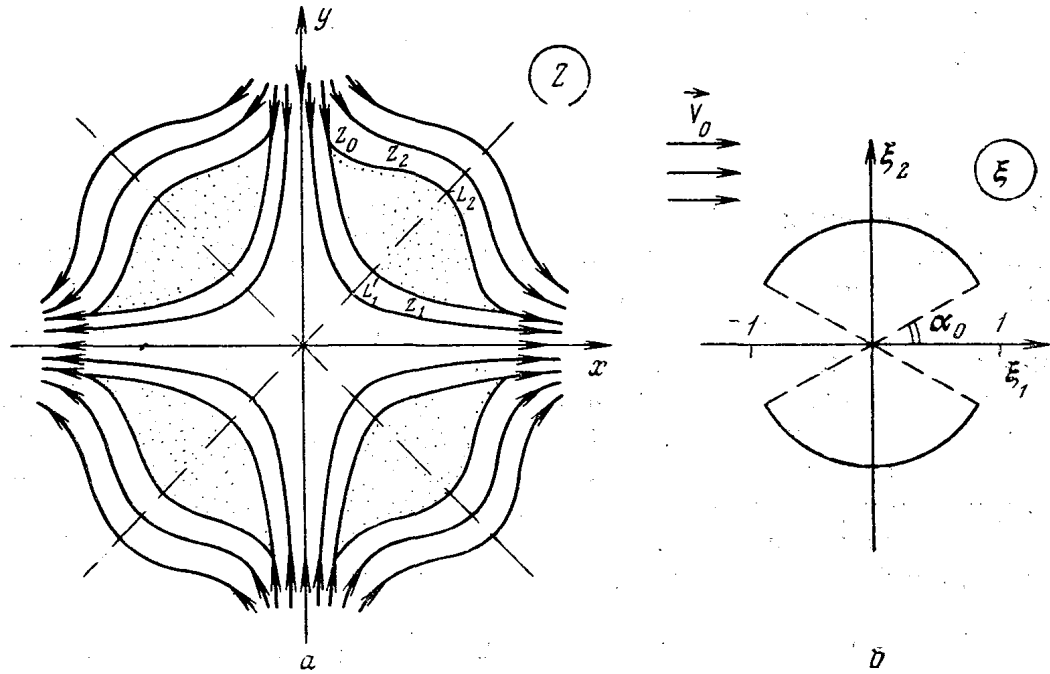
Комплексный потенциал W поля в присутствии плазмы в данном случае будет совпадать с потенциалом потока, обтекающего дужки единичной окружности со скоростью \vec{V}_∞ на бесконечности, данной по формуле (5) работы [1].

$$\vec{V}_\infty = \frac{dW}{d\xi} \Big|_{\xi_0} = \frac{dW_0}{d\xi_0} = V_0 e^{-i\theta},$$
$$V_0 = \left(\frac{B_s}{n}\right)^{n/n-1}, \quad \theta = 0,$$

где ξ_0 — значение ξ в отсутствие плазмы, т. е. при невозмущенном магнитном поле \vec{B}_0 :

$$\xi_0 = \left(\frac{\vec{B}^*}{B_s} \right) = \left(\frac{n}{B_s} \right)^{n/n-1} z^n,$$

\vec{B}_s — напряженность магнитного поля на границе плазмы. Общее реше-



ние $W(\xi)$ при таких условиях будет иметь вид (см. (1) в [1]) с $c=V_0$:

$$\frac{1}{V_0} \frac{dW}{d\xi} = \frac{1}{2} \left(l^{-i\theta} - \frac{1}{\xi^2} l^{i\theta} \right) + \left(\frac{1}{2} l^{-i\theta} + \frac{d^2}{2\xi^4} l^{i\theta} + \frac{G}{\xi} + \frac{d^2 G^*}{\xi^3} + \frac{d\gamma}{\xi^2} \right) \frac{1}{R(\xi)},$$

$$R(\xi) = \left[\left(1 - \frac{a_1}{\xi} \right) \dots \left(1 - \frac{a_4}{\xi} \right) \right]^{1/2} = \left[\prod \left(1 - \frac{a}{\xi} \right) \right]^{1/2}.$$

Причем $d^4 = a_1 a_2 a_3 a_4 = \Pi_a$ — комплексное число с модулем, равным единице, и произвольным аргументом, зависящим от выбора начального радиуса окружности, совпадающего с действительной осью в плоскости ξ (a_i — координаты концов дужек), θ, γ — действительные коэффициенты, G, G^* — пара комплексно-сопряженных коэффициентов.

Если нулевая точка в плоскости ξ является обыкновенной для $W(\xi)$, а циркуляция около бесконечности должна обращаться в нуль, для коэффициентов G, G^* в (1) из [1], получаем

$$G = G^* = 0. \quad (1)$$

Кроме того, полагаем

$$\gamma = -\cos 2\alpha_0, \quad (2)$$

где α_0 — угол между радиусом-вектором конца дужки и осью абсцисс (см. рис. 1, б). Это соответствует условию задачи, заключающемуся в том, что точки ветвления линий тока должны совпадать с концами дуг.

Окончательно получаем следующую формулу для определения искомого комплексного потенциала:

$$\frac{1}{V_0} \frac{dW}{d\xi} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^4} - \frac{2 \cos 2\alpha_0}{\xi^2}} \right). \quad (3)$$

Расположение силовых линий в плоскости z определяется из формулы $\frac{dW}{dZ} = \vec{B}^*$ (см. (8) работы [1] и (3) в данной работе):

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{V_0}{B_s} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\xi^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^4} - \frac{2 \cos 2\alpha_0}{\xi^2}} \right) \xi^{1/n-1}, \quad (4)$$

где $\frac{1}{2} \ll \frac{n-1}{n} < 1$.

Интегрированием (4) в соответствующих пределах определяются точки, характерные для плазменной конфигурации. Силовая линия, совпадающая с границей плазмы, получается при интегрировании (4) по дужке, что соответствует $\xi = e^{i\sigma}$, где $\alpha_0 \leq \sigma \leq \pi - \alpha_0$ для первого из рассматриваемых секторов силовых линий ($0 - \pi/n$). Так как полученные интегралы не берутся в общем виде для любого $n \geq 2$, ниже ограничимся случаем $n=2$. По-видимому, при других n картина поля в присутствии плазмы не будет существенно различаться, так что ущерб общности при сделанном ограничении не существует.

После приведения интегралов к эллиптическим и некоторым другим преобразованиям (см., например, [2—3]) получим

$$\begin{aligned} \vec{Z}_2 - \vec{Z}_0 = & \frac{V_0}{3B_s} \left\{ \left[\left(\cos \frac{3\alpha_0}{2} + 3 \cos \frac{\alpha_0}{2} \right) - \left(\cos \frac{3\sigma}{2} + 3 \cos \frac{\sigma}{2} \right) \right] + \right. \\ & + i \left[\left(3 \sin \frac{\alpha_0}{2} - \sin \frac{3\alpha_0}{2} \right) - \left(3 \sin \frac{\sigma}{2} - \sin \frac{3\sigma}{2} \right) \right] - \\ & - l^{-i\pi/4} 2 \sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \alpha_0} \left[\sin \alpha_0 \left[F \left(\frac{\pi}{2}, k' \right) - F(\varphi_1, k') \right] - \right. \\ & - \left. \left[E \left(\frac{\pi}{2}, k' \right) - E(\varphi_1, k') \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 - \sin \sigma)(\sin^2 \sigma - \sin^2 \alpha_0)}{1 + \sin \alpha_0}} + \right. \\ & + l^{i\pi/4} 2 \sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \alpha_0} \left[\sin \alpha_0 \left[F(\varphi_3, k') - F \left(\frac{\pi}{2}, k' \right) \right] + \right. \\ & + \left. \left[E \left(\frac{\pi}{2}, k' \right) - E(\varphi_3, k') \right] + \sqrt{\frac{\sin^2 \sigma - \sin^2 \alpha_0}{1 + \sin \alpha_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sin \sigma}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \sigma} \right) \right] \left. \right\}. \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1 - \vec{L}_1 = & \frac{V_0}{3B_s} \left\{ \left(\sqrt{2} - \cos \frac{3\sigma}{2} - 3 \cos \frac{\sigma}{2} \right) + \right. \\ & + i \left(\sqrt{2} + \sin \frac{3\sigma}{2} - 3 \sin \frac{\sigma}{2} \right) + \\ & + l^{-i\pi/2} 2 \sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \alpha_0} \left[-\sin \alpha_0 \left[F(\varphi_3, k') - F(\varphi_2, k') \right] + \right. \\ & + \left. \left[E(\varphi_3, k') - E(\varphi_2, k') \right] + \sqrt{2(1 - \sin \alpha_0)} - \right. \end{aligned}$$

$$-\sqrt{\frac{\sin^2 \sigma - \sin^2 \alpha_0}{1 + \sin \alpha_0}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sin \sigma}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \sigma} \right) \Bigg\}. \quad (6)$$

Положив в (5) $\sigma = \pi/2$, а в (6) $\sigma = \alpha_0$, получаем

$$\begin{aligned} \vec{Z}_0 - \vec{L}_1 &= \frac{V_0}{3B_s} \left\{ \left(\sqrt{2} - \cos \frac{3\alpha_0}{2} - 3 \cos \frac{\alpha_0}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \left(\sqrt{2} + \sin \frac{3\alpha_0}{2} - 3 \sin \frac{\alpha_0}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + l^{-i\pi/4} 2\sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \alpha_0} \left[\sin \alpha_0 F \left(\frac{\pi}{2}, k' \right) - E \left(\frac{\pi}{2}, k' \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + l^{i\pi/4} 2\sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \alpha_0} \left[\sin \alpha_0 F \left(\frac{\pi}{2}, k' \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - E \left(\frac{\pi}{2}, k' \right) + \frac{(1 + 3 \sin \alpha_0)}{(1 + \sin \alpha_0)} \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha_0}{2}} \right] \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- e^{-i\pi/4} 2\sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \alpha_0} \left[\sin \alpha_0 F \left(\frac{\pi}{2}, k' \right) - E \left(\frac{\pi}{2}, k' \right) \right] + \\ &\quad + l^{i\pi/4} 2\sqrt{2} \sqrt{1 + \sin \alpha_0} \left[- \sin \alpha_0 F (\varphi_4, k') + E (\varphi_4, k') \right] + \\ &\quad + \frac{(1 + 3 \sin \alpha_0)}{(1 + \sin \alpha_0)} \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha_0}{2}}. \quad (8) \end{aligned}$$

Обозначения в плоскости Z следующие: \vec{Z}_1 — радиусы-векторы точек, принадлежащих внутренней, обращенной к началу координат части границы плазменной области, \vec{Z}_2 — радиусы-векторы точек, принадлежащих внешней части границы плазмы, \vec{Z}_0 — радиус-вектор точки ветвления граничной линии тока; \vec{L}_1, \vec{L}_2 — радиусы-векторы точек, принадлежащих границе плазмы, отложенные по биссектрисе сектора силовых линий ($0 - \pi/2$). Положения всех указанных точек, характеризующих конфигурацию плазмы, показаны на рис. 1, а; $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$ — эллиптические интегралы соответствующих аргументов I и II рода соответственно

$$\begin{aligned} k^2 &= 1 - k'^2 = \frac{2 \sin \alpha_0}{1 + \sin \alpha_0}; \quad \varphi_1 = \varphi_1(\alpha_0, \sigma) = \\ &= \arcsin \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha_0}{2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha_0}{2}; \quad \varphi_3 = \varphi_3(\alpha_0, \sigma) = \\ &= \arcsin \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha_0}{1 + \sin \sigma}}, \quad \varphi_4 = \varphi_4(\alpha_0) = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha_0}{1 + \sin \alpha_0}}. \quad (8') \end{aligned}$$

Ширина области плазмы характеризуется следующей величиной, полученной из (7) и (8):

$$\begin{aligned} \vec{L}_2 - \vec{L}_1 &= \frac{V_0}{B_s} l^{i\pi/4} \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{1 + \sin \alpha_0} \left[- \sin \alpha_0 F (\varphi_4, k') \right] + \\ &\quad + E (\varphi_4, k') + \frac{(1 + 3 \sin \alpha_0)}{(1 + \sin \alpha_0)} \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha_0}{2}}. \quad (9) \end{aligned}$$

В случае $n=2$ вектор $\vec{L}_2 - \vec{L}_1$ составляет с осью абсцисс в плоскости Z угол $\pi/4$. Вектор \vec{L}_1 , входящий в (9), определяется интегрированием (4) по мнимой оси от 0 до i и имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{L}_1 = & \frac{V_0}{B_s} t^{i\pi/4} \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{1 + \sin \alpha_0} \left\{ \frac{1 + 2 \cos \alpha_0}{\sqrt{2}(1 + \sin \alpha_0)} + \right. \\ & + \frac{(1 - \sin \alpha_0)^2}{(1 + \sin \alpha_0)} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + \sin \alpha_0 F(\varphi_2, k') - \\ & \left. - \left[E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + E(\varphi_2, k') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Обозначения те же, что и в (8'). В написанных выше выражениях фигурирует параметр α_0 , который определенным образом связан с величиной давления плазмы. Для определения этой связи напишем выражение для векторного потенциала ψ_0 как функции от α_0 . Исходя из (3), имеем

$$\psi_0 = \text{Im} \int_0^i \frac{dW}{d\xi} d\xi = \text{Im} \left\{ \frac{V_0}{2} \int_0^i \left(1 - \frac{1}{\xi^2} + \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^4} - \frac{2 \cos 2\alpha_0}{\xi^2}} \right) d\xi \right\}.$$

Преобразуя полученные из этого выражения разности эллиптических интегралов, после несложных выкладок получаем следующее соотношение, связывающее ψ_0 , ρ_0 и α_0 :

$$\frac{\psi_0}{V_0} \equiv t = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos^2 \alpha_0}{1 + \sin \alpha_0} F\left(\frac{\pi}{2}, k_0\right) - (1 + \sin \alpha_0) E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right], \quad (11)$$

где

$$k_0^2 = \frac{4 \sin \alpha_0}{(1 + \sin \alpha_0)^2}.$$

Учет (5) при $n=2$ и условия $B_s^2/8 \pi$ дает

$$t = \frac{\psi_0}{2\pi\rho_0} \sim \frac{F\psi_0}{\rho_0}. \quad (12)$$

Из (11) нетрудно установить, что при изменении параметра от 0 до $\pi/2$, что соответствует непрерывным деформациям плазменной конфигурации, величина t принимает значения в интервале (0—1). Ниже исследуются два предельных случая, соответствующих $t \rightarrow 1$ и $t \rightarrow 0$.

Большие давления. Если давление плазмы намного превышает локальное магнитное давление невозмущенного поля, мы имеем случай $t \rightarrow 0$, что соответствует $\alpha_0 \rightarrow 0$. При этом $k^2 \sim 2\alpha_0$, $k'^2 \sim 1$, $\varphi_2 \sim \pi/4$, $\varphi_4 \sim \pi/2$.

Используя известные разложения для эллиптических интегралов при различных предельных значениях параметра k (см. [3]) и разложения для тригонометрических функций, из (7), (9) и (10) получаем следующие оценки величин, характеризующих размеры и форму плазменной области (члены порядков выше 1 по α_0 опускаются; все размеры даются в единицах V_0/B_s)

$$|\vec{L}_1| \sim 1,1; \quad \text{Re} \vec{Z}_0 \sim 0,4, \quad |\vec{L}_2 - \vec{L}_1| \sim 3,2. \quad (13)$$

Если еще учесть, что $V_0 \sim B_s^2 \sim \rho_0$, то становится ясно, что плазма занимает тем большую область, чем больше ее давление, причем с увели-

чением величины давления плазма все больше раздвигает свои границы в стороны сильного поля, делая их все более выпуклыми.

При $\psi_0=0$ мы имеем уже рассмотренный случай. Действительно, из (11) следует, что в данном случае $\alpha_0=0$, при этом (3) дает выражение для комплексного потенциала потока, потенциально обтекающего препятствие в виде круглого цилиндра. Это выражение совпадает с (7) работы [1]. При этом плазма занимает область в центре магнитной конфигурации с граничной силовой линией $\psi_0=0$, которая отображается в плоскости ξ на внутренность единичного круга.

Переход к случаю $\psi_0=0$ возможен также несколько иным образом, путем непрерывной деформации конфигурации плазмы при уменьшении давления и вызванного этим движения ее в сторону слабого поля.

Малые давления. Речь идет о таких давлениях, при которых обеспечивается условие $t \rightarrow 1$. Из (11) следует, что при $t \rightarrow 1$ $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$. При движении α_0 от 0 к $\pi/2$ значения интегралов, взятых по дужке, уменьшаются, стремясь при $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$ к нулю. Точно таким же образом ведут себя все характерные размеры плазменной области (\vec{Z}_0 , \vec{L}_1 и \vec{L}_2 стягиваются в одну точку).

Относительно вектора \vec{L}_1 , исходя из (10), можно сказать следующее: при движении $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$ абсолютное значение \vec{L}_1 уменьшается до тех пор, пока не обращается в нуль при определенном значении $\alpha_0 \leq \pi/2$, при котором $t=t_0 \leq 1$, $\rho_0 \geq \frac{\psi_0}{2\pi}$.

Направление \vec{L}_1 при этом сохраняется неизменным. Однако при $\vec{L}_1=0$ из физических соображений возможно лишь одно значение для ψ_0 : $\psi_0=0$.

Резюмируя все сказанное, можно сделать следующий вывод: если давление плазмы мало по сравнению с локальным магнитным давлением невозмущенного поля, то происходят сжатие области плазмы и одновременно ее движение в сторону слабого поля до тех пор, пока не становится выполненным соотношение $t \ll 1$. Если и дальше будем уменьшать давление плазмы, то наступит момент, когда плазма заполнит область нейтральной точки. В дальнейшем картина будет аналогична рассмотренной в [1]. В таком смысле (т. е. при уменьшении давления) можно также говорить о переходе при $\psi_0=0$ к случаю, рассмотренному в [1].

В заключение отметим, что предложенным методом [1] представляется возможным решить ряд других задач о конфигурациях плазменных сгустков в неоднородных магнитных полях, имеющих разную геометрию.

Автор благодарен Б. А. Тверскому за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Во Хонг Ань. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроф., № 3, 49, 1969.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления М., Физматгиз, 1962.
3. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1941.

Поступила в редакцию
13.12 1968 г.

Кафедра
космических лучей