

УДК 532.5:534.88

Ю. М. РОМАНОВСКИЙ, В. А. СВЕТЛОСАНОВ, В. И. ШМАЛЬГАУЗЕН

**О ЦЕЛЕСООБРАЗНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ ПРИЕМНИКОВ  
ЗВУКА НА ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ КОСОМ ОБТЕКАНИИ  
ЖИДКОСТЬЮ**

В статье содержится метод расчета и примеры характеристик пограничного слоя при косом обтекании эллипсоидов вращения, а также рекомендации о размещении приемников звука на телах вращения.

**Введение**

В последние годы в связи с увеличением скорости движения судов и самолетов большое значение приобретает вопрос о шуме, происхождение которого связано с турбулентным пограничным слоем. В настоящее время турбулентным шумом называют совокупность акустических явлений, обусловленных пульсациями скорости и давления в турбулентном потоке жидкости. Интенсивность турбулентного шума возрастает с увеличением скорости обтекания и превосходит почти все известные источники шума. Произведенные в последнее время расчеты, а также экспериментальные исследования показали [1], что при дозвуковых скоростях интенсивность звукового излучения турбулентного потока существенно ниже его так называемого псевдозвукового воздействия. Дело в том, что приемник звука, будучи по существу датчиком давления, воспринимает также давление, обусловленное движением несжимаемой жидкости и не имеющее ничего общего со звуковым давлением. Так возникает понятие о псевдозвуковом взаимодействии приемника звука с гидродинамическим полем. Так как приемники звука находятся на поверхности тел, то с этой точки зрения важно знать, где происходит зарождение и формирование турбулентности. В данной работе с помощью приближенных уравнений пограничного слоя определяются точки потери устойчивости ламинарного пограничного слоя при косом обтекании эллипсоидов вращения.

§ 1. При обтекании тела под углом атаки задача описывается трехмерными нелинейными уравнениями Прандтля.

Решение такой задачи посредством аналитических методов невозможно, а метод численного интегрирования требует столь длительного времени, что при большом количестве необходимых расчетов его практическая ценность резко снижается. Поэтому возникает необходимость

найти такие приближенные способы расчета пограничного слоя, которые быстро вели бы к цели, хотя бы даже ценой понижения точности результата. Известно, что задача об обтекании осесимметричных тел под нулевым углом атаки сходна с плоской задачей, поскольку и в той, и в другой составляющие скорости в пограничном слое зависят только от

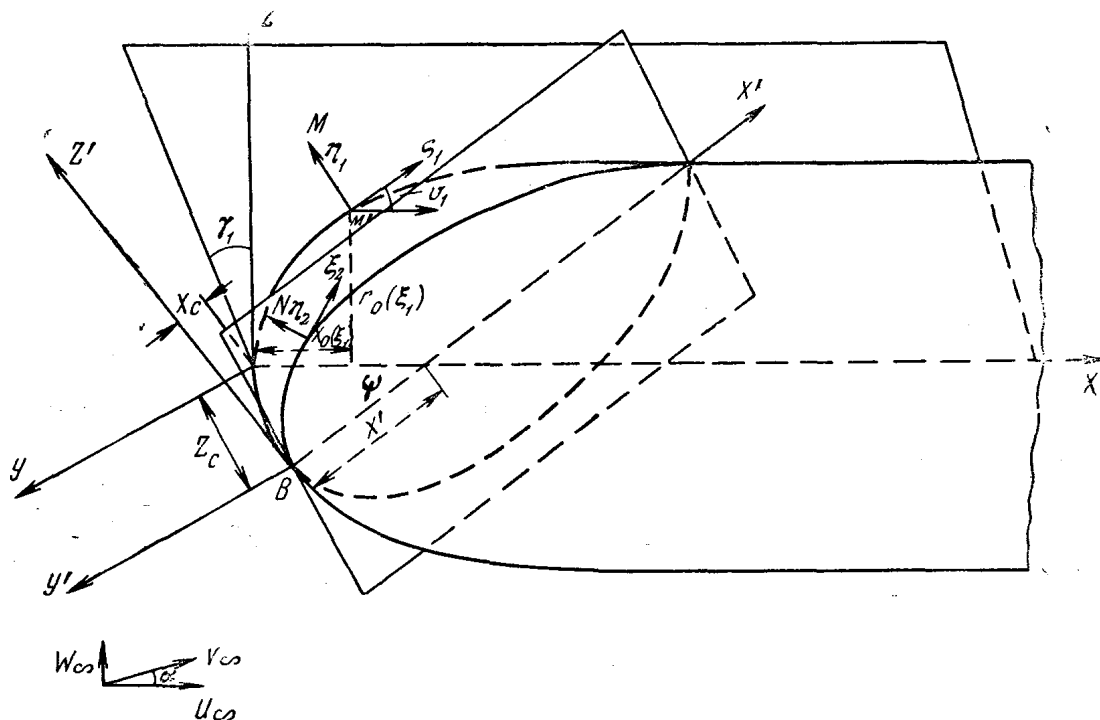


Рис. 1. Криволинейные ортогональные координаты  $\xi_1, \eta_1, \gamma_1$

двух координат. Если при расчете обтекания тела под углом атаки выбрать такую систему координат, у которой координатные линии будут совпадать с линиями тока потенциального течения, то мы получим двумерные уравнения. Следовательно, нужно таким образом выбрать систему координат, чтобы при достаточно малых углах атаки задачу трехмерного обтекания тела можно было приближенно свести к задаче, описываемой двумерными уравнениями.

При рассмотрении задачи об обтекании тел вращения уравнения пограничного слоя лучше всего вывести, используя криволинейные ортогональные координаты  $\xi_1, \eta_1, \gamma_1$  [4], как это показано на рис. 1. Здесь  $\xi_1$  и  $\eta_1$  координаты в направлениях, параллельном и перпендикулярном стенке. В качестве третьей координаты примем азимутальный угол в меридиональной плоскости.

Декартовы координаты  $X, Y, Z$  точки  $M$  связаны с криволинейными координатами  $\xi_1, \eta_1, \gamma_1$  следующими соотношениями (на рис. 1 оси  $OX$  и  $OZ$  лежат в плоскости чертежа):

$$\begin{aligned} X &= X_0(\xi_1) - \eta_1 \sin v_1, \\ Y &= [r_0(\xi_1) + \eta_1 \cos v_1] \sin \gamma_1, \\ z &= [r_0(\xi_1) + \eta_1 \cos v_1] \cos \gamma_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $v_1$  — угол между осью  $X$  и касательной к профилю тела в точке  $M_1$ .

Пусть поток набегает на тело под углом  $\alpha$ . Тогда в какой-то точке  $B$  скорость потенциального течения будет равна нулю. Возьмем эту

точку за начало новой декартовой системы координат  $X^1, Y^1, Z^1$ . Координаты  $X, Y, Z$  будут зависеть от координат  $X^1, Y^1, Z^1$  следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= (X^1 - X_c) \cos \psi - (Z^1 - Z_c) \sin \psi, \\ Y &= Y^1, \\ Z &= (X^1 - X_c) \sin \psi + (Z^1 - Z_c) \cos \psi. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\psi$  — угол между осями  $X$  и  $X^1$ , который мы выбираем, руководствуясь следующими соображениями. Введем криволинейную систему координат  $\xi_2 \eta_2 \gamma_2$  с началом в точке  $B$ , построенную по тому же принципу, что и система координат  $\xi_1 \eta_1 \gamma_1$ . Чем ближе будут линии  $\eta_2 = 0, \gamma_2 = \text{const}$  к линиям тока на поверхности обтекаемого тела, тем ближе полученные уравнения будут к двумерным уравнениям Прандтля. Из этих соображений мы выбираем угол  $\psi$  таким образом, чтобы оси декартовой системы координат  $Y^1$  и  $Z^1$  были касательными к поверхности тела в критической точке  $B$ . При этом различие углов  $\psi$  и  $\alpha$  зависит от формы тела и от самого угла  $\alpha$ . Очевидно, чем меньше  $\alpha$ , тем меньше разность  $|\alpha - \psi|$ .

В введенной системе координат:  $\eta_2$  — расстояние точки  $N$  от поверхности тела (см. рис. 1),  $\xi_2$  — длина дуги  $BN_1$ , которая получается путем пересечения тела вращения плоскостью, проходящей через ось  $X^1$  при фиксированном угле  $\gamma_2$ . Заметим, что выбор начала координат (точка  $B$ ) зависит от угла атаки  $\alpha$ . Тогда

$$\begin{aligned} X^1 &= X_0^1(\xi_2 \gamma_2) - \eta_2 \sin v_2, \\ Y^1 &= [r_0^1(\xi_2 \gamma_2) + \eta_2 \cos v_2] \sin \gamma_2, \\ Z^1 &= [r_0^1(\xi_2 \gamma_2) + \eta_2 \cos v_2] \cos \gamma_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $v_2$  — угол между осью  $X^1$  и касательной к профилю тела в выбранной системе координат  $\xi_2 \eta_2 \gamma_2$ . Запишем в безразмерном виде в системе координат  $\xi_2 \eta_2 \gamma_2$  уравнения Навье—Стокса. При этом, как обычно, опустим члены второго порядка малости и учтем, что кривизна  $K$  поверхности достаточно мала<sup>1</sup>

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + v \frac{\partial u}{\partial \eta_2} + \frac{\omega}{h_3} \frac{\partial u}{\partial \gamma_2} = - \frac{\partial p}{\partial \xi_2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_2^2}, \quad (4)$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial \xi_2} + v \frac{\partial \omega}{\partial \eta_2} + \frac{\omega}{h_3} \frac{\partial \omega}{\partial \gamma_2} = - \frac{\partial p}{h_3 \partial \gamma_2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta_2^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} (h_3 u) + \frac{\partial}{\partial \eta_2} (h_3 v) + \frac{\partial \omega}{h_3 \partial \gamma_2} = 0. \quad (6)$$

Эта система уравнений для пограничного слоя должна решаться при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u = v = \omega = 0 & \quad \text{при } y = 0, \\ u = U_1(\xi_2), \quad \omega = W_1(\xi_2 \gamma_2) & \quad \text{при } y = \delta. \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>1</sup> При этом используются коэффициенты Лямэ:  $h_1 = 1, h_2 = 1,$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial r_2}{\partial \gamma_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \gamma_2}\right)^2 + r_2^2}.$$

Здесь  $u, v, \omega$  — компоненты скорости в системе координат  $\xi_2\eta_2\gamma_2$ , отнесенные к составляющей  $U_\infty$  скорости набегающего потока, все длины отнесены к характерному линейному размеру тела  $L$ , а также введено число Рейнольдса  $Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$ ;  $\delta$  — толщина пограничного слоя.

Произведем оценку членов уравнений (4) — (6) с точки зрения порядка их величин с учетом граничных условий.

Порядок членов уравнения (4) в том числе и  $\frac{\partial p}{\partial \xi_2}$  есть единица. Порядок членов уравнения (5) может быть различным, так как зависит от  $\frac{\partial p}{\partial \gamma_2}$ , т. е. и от выбранного нами угла  $\psi$ . Чтобы оценить порядок величины  $\frac{\partial p}{\partial \gamma_2}$ , рассмотрим обтекание тела идеальной жидкостью.

Пусть поток набегаёт на тело под углом  $\alpha$ . Разложим скорость  $V_\infty$  набегающего потока на составляющие  $U_\infty$  и  $W_\infty$  (см. рис. 1) в декартовой системе координат  $X, Y, Z$ .  $U_\infty$  создает осесимметричное обтекание тела, причем скорость этого обтекания изменяется от нуля на носике тела до  $U_\infty$  вдали от него. Запишем компонент  $U(\xi_1)$  скорости обтекания на поверхности тела в криволинейной системе координат в виде  $U(\xi_1) = U_\infty \cdot \varphi_1(\xi_1)$ . При поперечном обтекании из тех же соображений  $W = W_\infty \cdot \varphi_2(\xi_1\gamma_1)$ . В этих соотношениях  $\varphi_1(\xi_1)$  и  $\varphi_2(\xi_1\gamma_1)$  порядка единицы.

Кроме того, для набегающего потока справедливо отношение  $\frac{W_\infty}{U_\infty} = \text{tg } \alpha$ . Так как при продольном обтекании тела вращения скорость в пограничном слое изменяется от 0 до  $U(\xi_1)$ , при поперечном обтекании от 0 до  $W(\xi_1\gamma_1)$ , а отношение скоростей  $\frac{W(\xi_1\gamma_1)}{U(\xi_1)}$  пропорционально  $\alpha$  для малых углов атаки, то в введенной нами системе координат  $\xi_2\eta_2\gamma_2$  отношение  $\frac{W_1(\xi_2\gamma_2)}{U_1(\xi_2)}$  будет иметь порядок малости  $\alpha$  или более высокий. Подчеркнем еще раз, что  $W_1(\xi_2\gamma_2)$  тем ближе к нулю, чем лучше выбранная система координат  $\xi_2\eta_2\gamma_2$  совпадает с линиями тока потенциального обтекания тела.

При оценке членов уравнений (4) — (6) будем исходить из естественного предположения, что в ламинарном пограничном слое отношение компонентов  $\frac{\overline{W}}{\overline{U}}$  внутри слоя будет того же порядка, что и на его границе  $\frac{W_1(\xi_2\gamma_2)}{U_1(\xi_2)}$ . Значит при достаточно малых углах  $\alpha$  члены уравнения (5) имеют порядок малости  $\alpha$  относительно членов уравнения (4).

Таким образом, мы получаем приближенные уравнения пограничного слоя

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + v \frac{\partial u}{\partial \eta_2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_2^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} (r_2 u) + \frac{\partial}{\partial \eta_2} (r_2 v) = 0, \quad (8)$$

$$\omega = 0.$$

Заметим, что для линии, лежащей в плоскости симметрии, уравнение (5) можно сразу опустить ввиду того, что на этой линии  $\frac{\partial p}{\partial \gamma_2} = 0$ ,

следовательно и  $\omega=0$ . Поэтому все последующие расчеты по верхней и нижней кромке проводятся с той же степенью прочности, что и расчеты осесимметричного обтекания. И именно на них основаны наши рекомендации о возможном расположении приемников звука (для воды—гидрофонов).

Из системы уравнений (8) можно получить такое же уравнение импульсов, как и в случае осесимметричного обтекания тел вращения [2]

$$\frac{dz}{d\xi_2} = \frac{1}{V} \left[ F(\kappa) - 2\kappa \frac{1}{r_2} \frac{dr_2}{d\xi_2} \cdot \frac{V}{V'} \right], \quad (9)$$

где  $\kappa = z \cdot V'$ ,  $r_2(\xi_2)$  — расстояние от оси вращения до поверхности тела в выбранной системе координат. Здесь  $V$  — потенциальная скорость трехмерного обтекания тела вращения под углом атаки,  $V'$  — производная по криволинейной координате  $\xi_2$ . Следует отметить, что хотя полученное уравнение (9) по форме совпадает с уравнением пограничного слоя при осесимметричном обтекании тела, однако входящие в это уравнение функции зависят от угла атаки и будут различны в различных меридиональных плоскостях. Расчет всех гидродинамических параметров проводим согласно [4] по методу Польгаузена. Функция

$$F(\kappa) = 2 \left( \frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072} \right) \left[ \left( 2 - \frac{116}{315} \lambda + \left( -\frac{1}{120} + \frac{2}{945} \right) \lambda^2 + \frac{2}{9072} \lambda^3 \right) \right] \quad (10)$$

универсальна и не зависит от формы тела.

Зная  $\kappa$ , находим формпараметр  $\lambda$

$$\kappa = \left( \frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072} \right)^2 \cdot \lambda. \quad (11)$$

Можно вычислить также толщину потери импульса  $\theta(\xi_2)$ , толщину вытеснения  $\delta^*$  и касательное напряжение на стенке  $\tau_0$ :

$$\begin{aligned} \theta(\xi_2) &= \sqrt{\frac{\kappa v}{V'}}, \\ \delta^*(\xi_2) &= f_1(\lambda) \theta(\xi_2), \\ \tau_0(\xi_2) &= f_2(\lambda) \mu V, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $f_1(\lambda)$ ,  $f_2(\lambda)$  — известные функции. При этом профиль скоростей в пограничном слое берется в виде полинома четвертой степени.

Для решения уравнения (9) нам надо знать потенциальную скорость  $V$  обтекания тела, расстояние от оси  $X^1$  до поверхности тела, а также их производные по  $\xi_2$ . Значения потенциальной скорости могут быть получены на основании расчета или эксперимента.

В нашем случае мы пользовались аналитическим выражением потенциального течения идеальной жидкости при обтекании эллипсоидов вращения под углом атаки [5]. Зная величины  $\lambda$ ,  $V$ ,  $\delta^*$ , можно, согласно [4], провести расчет точек потери устойчивости ламинарного течения при разных значениях числа Рейнольдса и для разных углов атаки  $\alpha$ .

§ 2. Для решения задачи была составлена программа для вычислительной машины «Стрела-4». В соответствии с изложенным планом решения был проведен расчет гидродинамических параметров ламинарного пограничного слоя. Графики зависимости величин формпараметра  $\lambda$  и касательного напряжения на стенке  $\tau_0$  от координаты для разных значений  $k = \frac{b}{a}$  и разных углов атаки представлены на рисунках 2—4. Расчеты проводились только по верхней (подсасывающая сторона) и нижней (подветренная сторона) кромкам эллипсоидальных тел. На

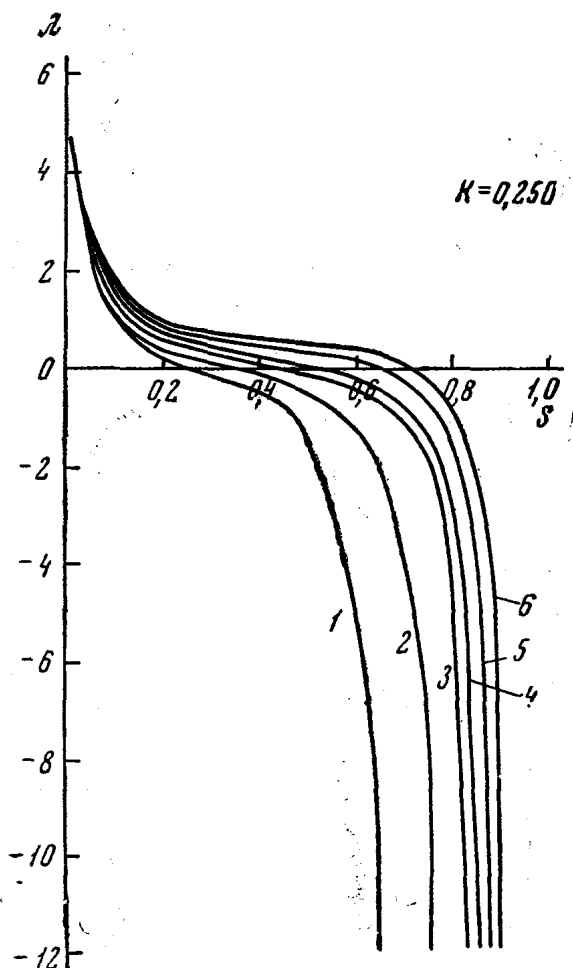


Рис. 2. Зависимость величины формпараметра  $\lambda$  от координаты для различных значений углов атаки по верхней (1, 2, 3) и нижней (4, 5, 6) кромкам эллипсоидов. 1 —  $\alpha=6^\circ$ , 2 —  $\alpha=4^\circ$ , 3 —  $\alpha=1^\circ$  [1]; 4 —  $\alpha=1^\circ$ , 5 —  $\alpha=4^\circ$ , 6 —  $\alpha=6^\circ$  [2]

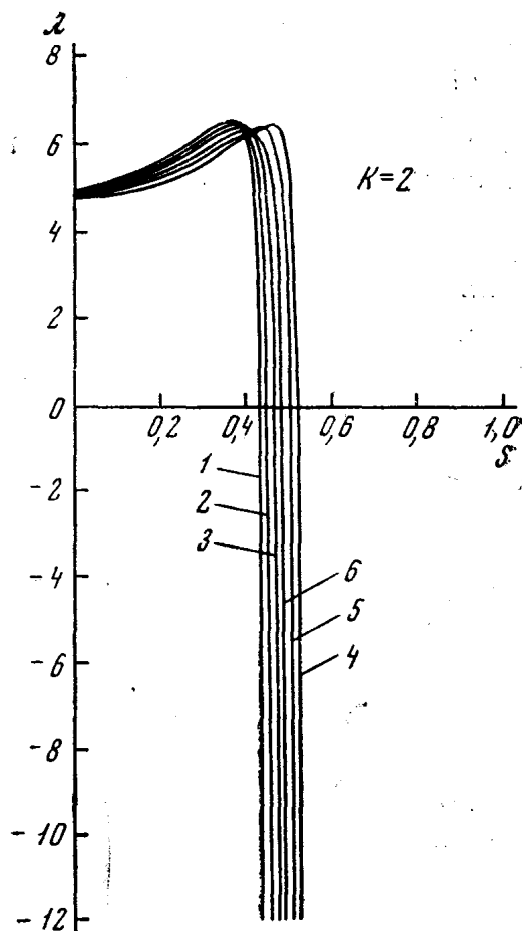


Рис. 3. Зависимость величины формпараметра  $\lambda$  от координаты для различных значений углов атаки. Обозначения те же, что на рис. 2

рис. 2—4 индекс [1] означает верхнюю, а индекс [2] нижнюю кромки тел.

Были взяты значения  $k=0,125; 0,250; 0,5; 1,6; 2$  и углы атаки  $\alpha=1, 4$  и  $6^\circ$ . При рассмотрении графиков зависимости формпараметра  $\lambda$  от координаты атаки следует заметить, что расчет проводился до значения  $\lambda=-12$ , где происходит отрыв пограничного ламинарного слоя, так как при этом значении  $\lambda$  касательное напряжение  $\tau_0$  равно нулю.

Расчеты показали, что расстояние между точками отрыва ламинарного пограничного слоя на верхней и нижней кромках увеличивается при возрастании  $\alpha$  тем быстрее, чем меньше значение  $k = \frac{b}{a}$ .

Полученные результаты дали полное совпадение с результатами, помещенными в статье [2] для нулевого угла атаки. Кроме того, было проведено сравнение с результатами, полученными Ю. Д. Шевелевым [3] при численном расчете пограничного слоя на эллипсоидах, обтекаемых под различными углами атаки. Результаты сравнения для точек отрыва ламинарного течения по верхней А [1] и нижней А [2] кромках представлены в таблице.

$k = \frac{b}{a}$	$\alpha$	A [1]	B [1]	A [2]	B [2]
0,5	7° 30'	0,56	0,60	0,77	0,76
0,333	10°	0,66	0,55	0,82	0,86

В этой таблице в столбцах А [1] и А [2] приведены безразмерные длины дуг, соответствующие точкам отрыва ламинарного пограничного слоя по расчетам Ю. Д. Шевелева по верхней и нижней кромкам соответственно, В [1] и В [2] — результаты, полученные нами.

§ 3. На основании полученных результатов был проведен расчет точек потери устойчивости ламинарного течения на эллипсоидах вращения, обтекаемых под углом атаки. Были взяты значения  $k=0,125; 0,250; 0,5; 1,6, 2$ . На рис. 5 даны графики зависимости координат точек потери устойчивости ламинарного пограничного слоя от числа  $Re$  для различных углов атаки  $\alpha$  при  $k$  равном 0,250 и 2. Используемое при этом число  $Re$  равно  $\frac{U_{\infty} \cdot s_0}{\nu}$ , где  $s_0$  — длина дуги соответствующего эллипсоида, а  $\nu$  — кинематическая вязкость.

Результаты расчета показали, что чем более вытянуто тело, тем быстрее происходит потеря устойчивости ламинарного течения. Для тел, у которых  $k > 1$ , при определенных значениях числа  $Re$  отрыв ламинарного течения может наступать раньше, чем произойдет потеря устойчивости.

Приведенные на рис. 2—5 кривые позволяют выбрать целесообразную зону размещения гидрофонов на поверхности тела вращения, носо-

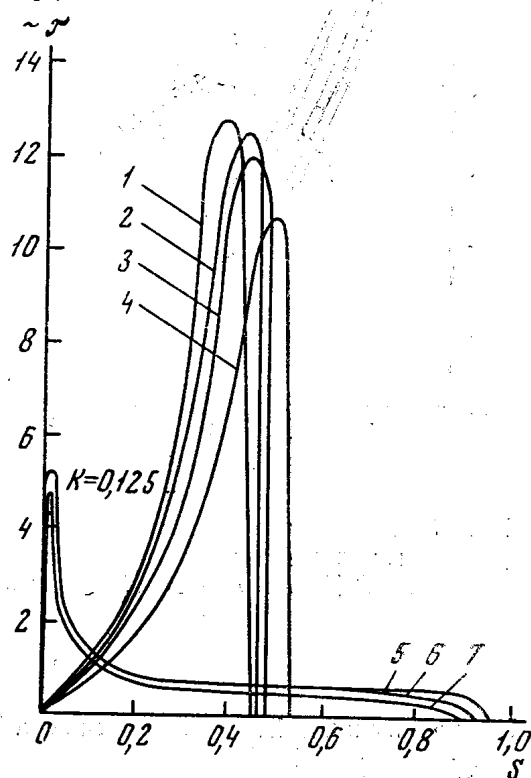


Рис. 4. Зависимость величины касательного напряжения  $\tau$  на поверхности вдоль верхней и нижней кромок. 1, 2, 3 — обозначения те же, что на рис. 2; 4 —  $\alpha=6^\circ$  [2]; 5 —  $\alpha=1^\circ$  [1]; 6 —  $\alpha=1$ ; 7 —  $\alpha=7^\circ$  [2]

вая часть которого по форме близка к эллипсоиду. Эта зона должна располагаться впереди точки отрыва ламинарного пограничного слоя ( $\tau_0 = 0$  рис. 3) и точки потери устойчивости.

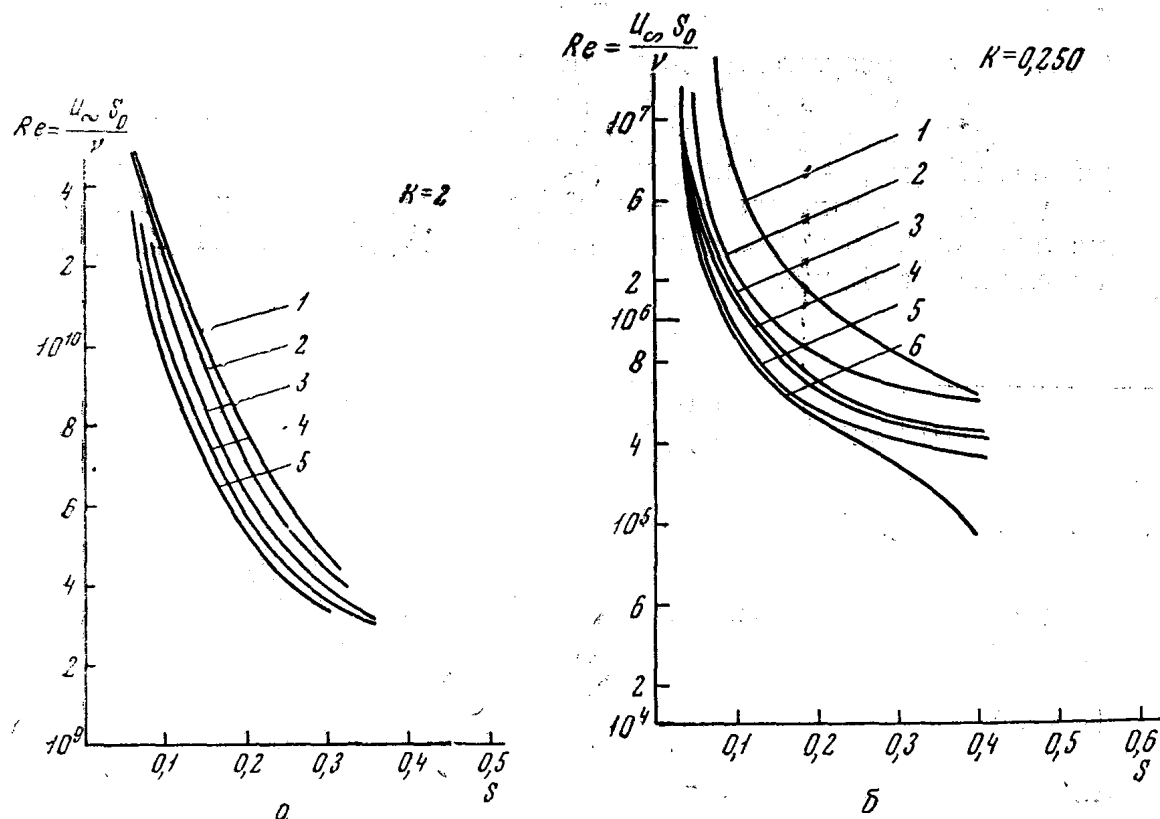


Рис. 5. Положение точки потери устойчивости в зависимости от числа  $Re$  для различных углов  $\alpha$  и чисел  $k=b/a$ . а: 1 —  $\alpha=6^\circ$ , 2 —  $\alpha=4^\circ$  [2]; 3 —  $\alpha=1^\circ$ , 4 —  $\alpha=4^\circ$ , 5 —  $\alpha=6^\circ$  [1]; б: б —  $\alpha=1^\circ$  [2], остальные обозначения те же, что на рис. 5, а

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петровский В. С. Гидродинамические проблемы турбулентного шума. Л., «Судостроение», 1966.
2. Pretsch J. Die laminare Reibungsschicht an elliptischen Zylindern und rotationsellipsoiden bei symmetrischer Umströmung Luftfahrt forschung, 1941, В. 18, fg. 12.
3. Шевелев Ю. Д. «Механика жидкости и газа», № 5, 1966.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., ИЛ., 1956.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., ГИТТЛ, 1957.

Поступила в редакцию  
7.3 1969 г.

Кафедра  
общей физики для мехмата