Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1969

УДК 62—501,15

А. М. ГРИГОРЬЕВ

К ИССЛЕДОВАНИЮ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С «ЧИСТЫМ» ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Понятие функции подвижности корня характеристического уравнения распространяется на класс систем с «чистым» запаздыванием, когда варьируемыми параметрами являются коэффициент усиления k и время запаздывания τ. Перечислены свойства функций подвижности систем с запаздыванием. Приводятся примеры построения функций подвижности.

Теория чувствительности получила наиболее широкое применение в теории автоматического регулирования. Эта теория занимается исследованием изменения свойств систем при изменении их параметров [1]. Существует много критериев, характеризующих чувствительность систем. Одним из таких критериев является так называемая «корневая чувствительность», характеризующая изменение положения корней характеристического уравнения при изменении параметров системы [2]. Это позволяет непосредственно связать изменение параметров системы с изменением ее динамических свойств, определяемых расположением корней характеристического уравнения.

Для исследования «корневой чувствительности» введем понятие функции подвижности корня характеристического уравнения [3]:

$$\vec{\lambda}_\alpha = \frac{d\vec{p}}{d\alpha}, \tag{1}$$

где $\vec{p}$ — корень характеристического уравнения системы и α — параметр, подверженный изменениям. Очевидно, смещение корня характеризуется не только величиной, но и направлением. Поэтому функция $\vec{\lambda}_\alpha$ является векторной и в выражении [1] удобно пользоваться векторным представлением комплексных чисел ($\vec{\lambda}_\alpha$ и $\vec{p}$).

Работа посвящена исследованию свойств функции подвижности для систем с «чистым» запаздыванием и их применению для исследования чувствительности таких систем. Рассмотрим системы, описываемые характеристическим уравнением

$$\Phi_n(p) + k\Psi_m(p)\,e^{-p\tau} = 0, \tag{2}$$

где Φ_n и Ψ_m — полиномы от p степеней n и m; k — коэффициент усиления и τ — время запаздывания. Было исследовано две функции подвижности — $\vec{\lambda}_k$ и $\vec{\lambda}_\tau$, связанные с изменением параметров k и τ соответственно.

Рассмотрим сначала функцию подвижности $\vec{\lambda}_k$, связанную с изменениями коэффициента усиления. Используя уравнение (2), после несложных преобразований получим

$$\vec{\lambda}_k = \frac{\Psi_m^2 e^{-p\tau}}{\Phi_n \Psi_m' - \Phi_n' \Psi_m - \tau \Phi_n \Psi_m}. \qquad (3)$$

Напомним еще раз, что функция подвижности является функцией векторного аргумента $\vec{p}$. Подставляя в (3) $p = \delta + j\omega$ и разделяя действительную и мнимую части, можно получить достаточно простую расчетную формулу для определения $|\vec{\lambda}_k|$ и $\arg \vec{\lambda}_k$. Величина $|\vec{\lambda}_k|$ характеризует величину смещения корня при малых изменениях k, а $\arg \vec{\lambda}_k$ — направление этого смещения. Оказалось, что для получения расчетной формулы удобно пользоваться формулами аналитического метода траекторий корней [4]. Применение этих формул позволяет свести дифференцирование по p к дифференцированию по δ.

Вектор подвижности определяет направление прохождения траекторий корней по параметру k через исследуемую точку p. Другими словами, $\vec{\lambda}_k$ направлен всегда по касательной к траекториям. Следовательно, если мы имеем построенные траектории для случая, когда параметром траектории является коэффициент усиления, то направления векторов функций подвижности можно считать заданными при всех значениях k и достаточно рассматривать только $|\vec{\lambda}_k|$ или скалярную функцию подвижности. При этом удобно пользоваться следующей формулой:

$$|\vec{\lambda}_k| = \frac{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f_\delta'}{f_\omega'}\right)^2}}{\left|\dfrac{\partial k}{\partial \delta} - \dfrac{\partial k}{\partial \omega}\dfrac{f_\delta'}{f_\omega'}\right|}. \qquad (4)$$

В этой формуле $f(\delta, \omega)$ — левая часть уравнения траекторий $f(\delta, \omega) = 0$ и $k = k(\delta, \omega)$ — формула параметра. Уравнения траекторий и формула параметра для систем с чистым запаздыванием получены в работах Г. А. Бендрикова и Ф. Б. Конева [5, 6].

Рассмотрим некоторые свойства функции подвижности корня $\vec{\lambda}_k$.

Знаменатель выражения (3) представляет собой левую часть уравнения кратных точек для параметра траектории k. Следовательно, при приближении корней к кратной точке подвижность этих корней стремится к бесконечности.

При $k = 0$ можно выделить две группы корней: начальные точки в конечной области плоскости p, определяемые уравнением $\Phi_n = 0$, и бесконечное число начальных точек, расположенных в бесконечности слева от мнимой оси. При этом подвижность корней в простых конечных начальных точках ограничена по модулю. В кратных начальных точках функция подвижности обращается в бесконечность, что является следствием первого свойства. Подвижность корней, расположенных слева в бесконечности стремится к бесконечности.

При $k \to \infty$ также можно выделить две группы корней: корни, стремящиеся к предельным точкам, определяемым уравнением $\Psi_m = 0$, и бесконечное число корней, уходящих к бесконечно удаленным предельным точкам справа от мнимой оси. И в том и в другом случае подвижность стремится к нулю, даже если предельные точки являются кратными.

Если зафиксировать параметр k и исследовать функцию подвижности вдоль линии равного усиления, то с увеличением номера корня l (по его удаленности от начала координат)

$$\lim_{l \to \infty} \vec{\lambda}_k = \frac{1}{\tau k}. \qquad (5)$$

Рассмотрим методику исследования чувствительности систем с запаздыванием на простых примерах. Предварительно отметим, что хотя функция подвижности является функцией δ и ω, удобнее строить ее в координатах $(|\vec{\lambda}_k|, k)$. Переход к $\vec{\lambda}_k$ как функции k можно легко осуществить, используя формулу параметра $k = k(\delta, \omega)$. Рассмотрим систему класса $[0, 0]_\tau$, описываемую характеристическим уравнением

$$1 + ke^{-p\tau} = 0. \qquad (6)$$

Эта система является интересной в том смысле, что она определяет асимптотические свойства траекторий корней по параметру k. Для системы $[0, 0]_\tau$ получаем

$$|\vec{\lambda}_k| = \frac{1}{|k|\tau}, \qquad (7)$$

т. е. в этом простейшем случае можно получить явную зависимость от k. На рис. 1, *а* представлены траектории корней системы $[0, 0]_\tau$, а на рис. 1, *б* — график модуля функции подвижности. На этом графике $k>0$

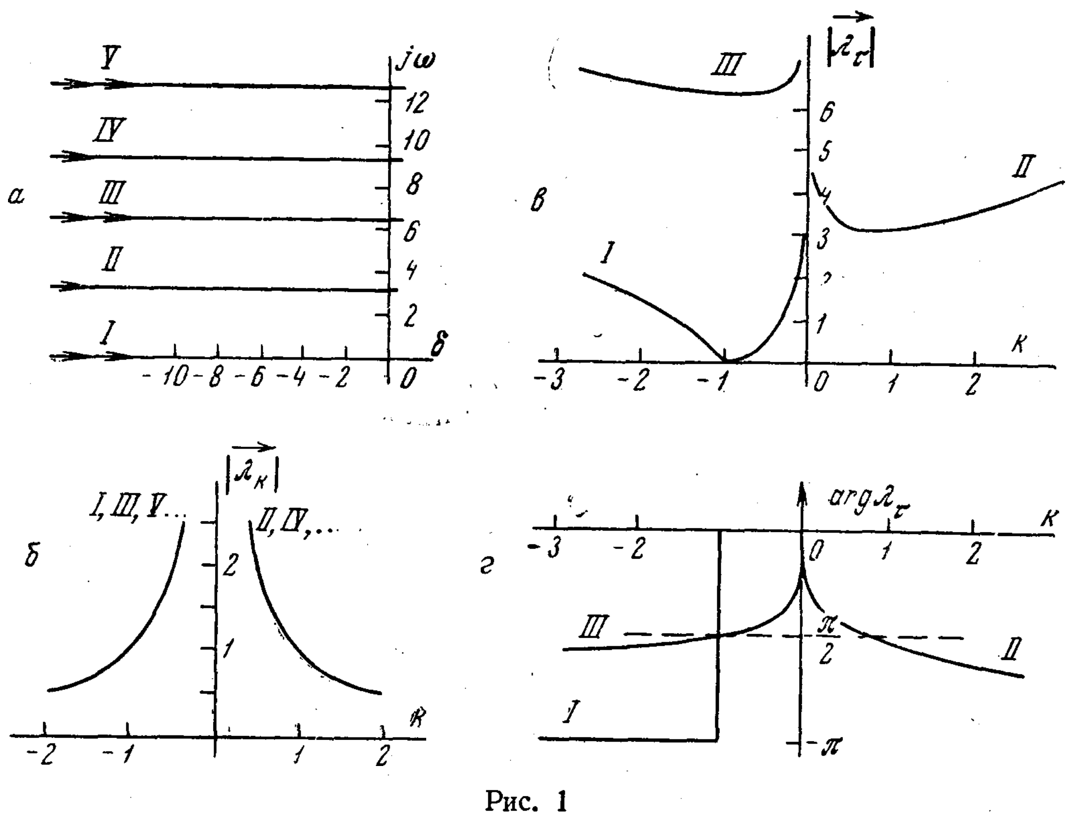

Рис. 1

соответствует отрицательной обратной связи, а $k<0$ — положительной. Римскими цифрами обозначены ветви траекторий и соответствующие ветви $\vec{\lambda}_k$. Из рис. 1, *б* видно, что для этой системы значения функции подвижности не зависят от номера ветви. Кроме того, отметим, что значения функции подвижности для этой простейшей системы совпадают с предельными значениями функции подвижности при движении вдоль линии равного усиления для более сложных систем. На рис. 2 представ-

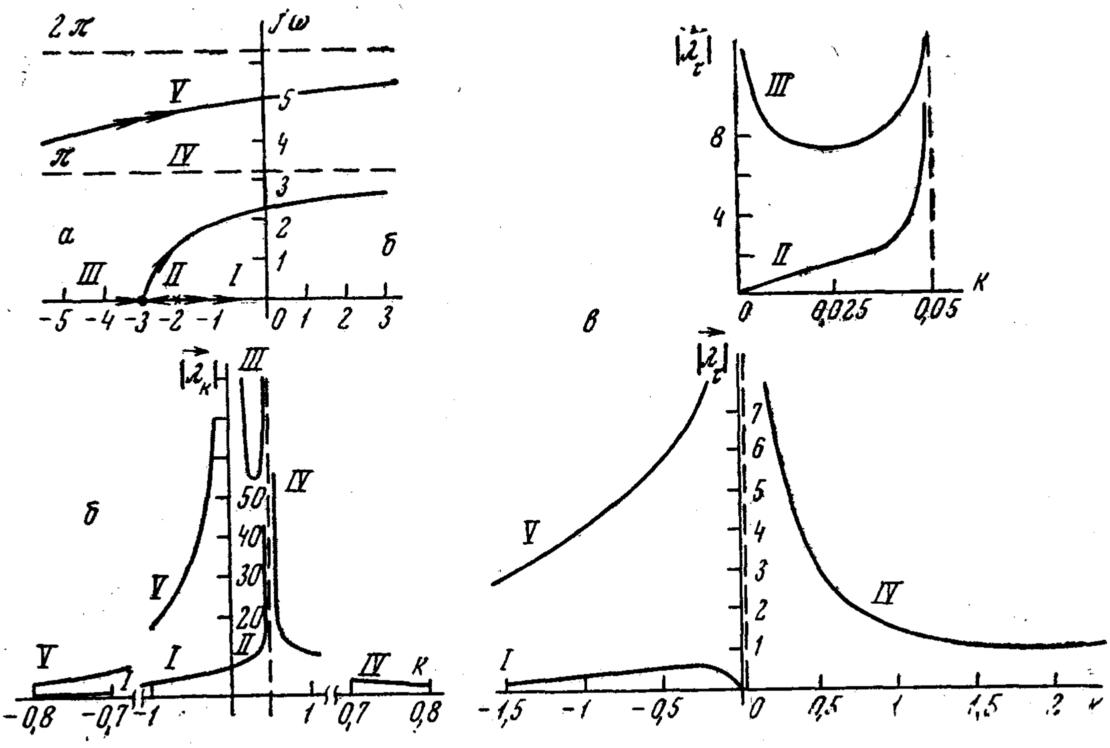

Рис. 2

лены траектории корней и графики модуля функции подвижности для нескольких ветвей траекторий корней системы класса $[1, 0]_\tau$, описываемых уравнением

$$(p+2)+ke^{-p\tau}=0. \tag{8}$$

Обозначения такие же, что и на предыдущем рисунке. Практически для исследования чувствительности системы достаточно исследовать чувствительность только ближайших к началу координат корней характеристического уравнения, определяющих переходный процесс в системе, или доминирующих корней. Вопрос об определении количества доминирующих корней достаточно полно разработан в работах по применению метода траекторий корней к системам с «чистым» запаздыванием [6].

Точно таким же образом можно определить функцию $\vec{\lambda}_\tau$, связанную с изменением параметра τ (времени запаздывания)

$$\vec{\lambda}_\tau=\frac{p\Phi_n\Psi_m}{\Phi_n\Psi_m'-\Phi_n'\Psi_m-\tau\Phi_n\Psi_m}. \tag{9}$$

Заметим, что в выражение $\vec{\lambda}_\tau$ варьируемый параметр входит в явном виде. Анализируя формулу (9), можно выяснить, как и в предыдущем случае, ряд свойств функции $\vec{\lambda}_\tau$. Не останавливаясь на них, перейдем к примерам построения функции $\vec{\lambda}_\tau$. Здесь возможны два подхода. Во-первых, можно изменять величину τ (т. е. строить траектории корней, когда параметром траектории является τ [7]) и исследовать поведение функции подвижности $\vec{\lambda}_\tau$ вдоль отдельных ветвей этой траектории. Во-вторых, можно менять параметр k и исследовать изменение $\vec{\lambda}_\tau$ на различных ветвях траекторий, когда параметром траекторий является k. Второй подход кажется более интересным, так как практически свободным параметром является именно коэффициент усиления. Однако в этом случае необходимо определять не только $|\vec{\lambda}_\tau|$, но и $\arg \vec{\lambda}_\tau$ так как траектории по параметру k не определяют направление смещения при изменении τ.

Для системы $[0, 0]_\tau$ функция подвижности $\vec{\lambda}_\tau$ определяется формулой

$$\vec{\lambda}_\tau = -\frac{p}{\tau}. \tag{10}$$

На рис. 1,*в* приведена зависимость $|\vec{\lambda}_\tau|$ от k для нескольких ветвей траекторий, изображенных на рис. 1,*а*, а на рис. 1,*г* — зависимость $\arg \vec{\lambda}_\tau$ от k для этих же ветвей. На рис. 2,*в* показана зависимость $|\vec{\lambda}_\tau|$ от k для системы $\{1, 0]_\tau$.

Остановимся на возможностях применения функции подвижности для исследования свойств САУ и, в частности, для исследования САУ с «чистым» запаздыванием.

Если известен вид функции подвижности в зависимости от изменения параметра, то определенным выбором значения этого параметра возможно сделать систему с минимальной чувствительностью доминирующих корней как к изменению этого параметра, так и к изменению других параметров. В случае систем с «чистым» запаздыванием, например, при определенных значениях k, можно добиться минимальной чувствительности как к изменению k, так и к изменению τ.

Исследование вида функции подвижности позволяет сделать оценку влияния различных параметров системы на положение корней характеристического уравнения и, следовательно, на ее динамические свойства.

Если из каких-либо технических требований задана область расположения доминирующих корней на плоскости p, то, зная значения функции подвижности этих корней, можно определить требования к стабильности параметров и, наоборот, зная допуски на параметры, можно определить область возможного смещения корней характеристического уравнения.

Влияние случайного возмущения какого-либо параметра, например τ, в некоторых случаях может быть скомпенсировано сознательным изменением другого параметра. Если известна функция подвижности, то можно оценить возможность такой компенсации и величину необходимого для этого изменения параметра.

Если система находится вблизи границы устойчивости, то функция подвижности дает возможность приближенного определения запаса устойчивости по различным параметрам.

Если каким-либо образом получено распределение корней уравнения (2) на плоскости комплексного переменного p при некоторых значениях k и τ, то функция подвижности позволяет приблизительно оценить изменение расположения корней этого уравнения при небольших изменениях параметров. Такая оценка может представлять самостоятельный интерес при исследовании трансцендентных уравнений вида (2).

Отметим, что функция подвижности, вообще говоря, может быть определена без построения траекторий корней. Однако предварительное построение траекторий корней уравнения (2) существенно облегчает исследование чувствительности и вычисление функций подвижности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокотович П. В., Рутман Р. С. «Автоматика и телемеханика», **26**, № 4, 1965.
2. Stapleford R. L., Mc Ruer D. T. AIAA Journal, 4, No. 9, 1966.
3. Григорьев А. М., Лисаков Ю. В. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 2, 1968.
4. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
5. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 1967.
6. Конев Ф. Б. Реферат канд. диссертации. МГУ, 1968.
7. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 3, 1968.

Поступила в редакцию
25.2 1969 г.

Кафедра
физики колебаний