ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1969

УДК 536.48

К. К. ЛИХАРЕВ

К ТЕОРИИ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ДЕТЕКТИРОВАНИЯ

Рассмотрено воздействие гармонического внешнего сигнала на систему, состоящую из резонатора с включенным в него слабым контактом двух сверхпроводников, через который могут протекать как джозефсоновский, так и обычный ток. Методом медленно меняющихся амплитуд вычислены параметры колебаний в системе и вольт-амперная характеристика контакта и их изменение при подаче внешнего сигнала. Проанализирован вопрос о чувствительности и инерционности такого детектирующего устройства.

Введение

Известно, что слабые контакты двух сверхпроводников могут быть весьма чувствительными к электромагнитным колебаниям (волнам) [1—5]. Это позволяет использовать такие контакты в качестве детекторов вплоть до субмиллиметрового диапазона [4]. Одно из наиболее перспективных в этом отношении явлений — появление при подаче внешнего гармонического сигнала на вольтамперной характеристике (ВАХ) контакта «ступенек» тока на напряжениях V_n. Эти напряжения связаны с частотой падающей волны ω соотношением Джозефсона [1]:

$$V_n = n\frac{\hbar}{2e}\omega. \qquad (1)$$

Здесь n — целое число, e — заряд электрона, $\hbar/2\pi$ — постоянная Планка. Экспериментально обнаружено [3, 5], что ступеньки тока имеют наибольшую величину, если частота ω близка к одной из резонансных частот электродинамической системы, связанной с контактом.

В данной работе рассмотрено воздействие гармонического внешнего сигнала на систему, состоящую из резонатора с включенным в него слабым контактом. При этом сделаны следующие допущения.

Контакт имеет достаточно малые размеры, так что для него на определенном типе колебаний выполнено условие квазистационарности[1].

---

[1] Это условие выполняется как для точечных контактов, так и для туннельных переходов малой длины $l\left(l \ll \lambda_\omega = 2\pi\frac{\bar{c}}{\omega}\right)$.

В этом случае контакт можно описывать полным током $I(t)$, напряжением $V(t)$ и единой разностью фаз сверхпроводников

$$\varphi_c(t) = \frac{2e}{\hbar}\int V dt. \tag{2}$$

Ток через контакт состоит из тока куперовских пар I_c, который подчиняется уравнению Джозефсона в простейшей форме [1, 6]:

$$I_c(t) = I_0 \sin\varphi_c \tag{3}$$

и дополнительного тока I_g, который является однозначной функцией напряжения V. При этом в величине I_0 должно учитываться действие внешнего и собственного магнитных полей [7].

Внешний резонатор и емкость контакта образуют линейную резонансную систему, причем один из типов колебаний этой системы имеет при частоте $\Omega \simeq \omega$ параллельный относительно контакта резонанс. Собственное затухание резонансной системы на частотах вблизи Ω, которое обусловливается потерями в резонаторе, сверхпроводниках и контакте, достаточно мало: $h = \frac{\Omega}{2Q}$, $Q \gg 1$.

Нелинейность, вносимая в систему током I, достаточно мала. Это требование сводится к неравенству

$$\alpha \equiv \frac{\rho I_0}{V_0} \ll 1, \tag{4}$$

где ρ — волновое сопротивление системы относительно контакта.

Укороченные уравнения

Если выписанные условия выполнены, то колебательная система на частотах $\omega \simeq \Omega$ близка к линейной и консервативной. В этом случае напряжение на контакте $V(t)$ может быть представлено в виде

$$V(t) = V_0 + A\cos\Phi, \quad \Phi = \omega t + \varphi,$$

$$V_0 \simeq V_1 \equiv \frac{\hbar}{2e}\,\omega,$$

где величины V_0, A и φ являются медленными функциями времени:

$$\frac{d}{dt}[V_0, A, A_\varphi] \ll \omega V_0. \tag{5}$$

При этом будут справедливы (см., например, [8]) следующие укороченные уравнения:

$$\begin{gathered}
\frac{dA}{dt} + hA + \frac{\rho\Omega}{2}[I^{(c)} + I_\sim \cos\psi] = 0,\\
A\frac{d\varphi}{dt} + (\omega - \Omega)A - \frac{\rho\Omega}{2}[I^{(s)} + I_\sim \sin\psi] = 0,\\
t_0\frac{dV_0}{dt} + V_0 + R_0[+I^{(0)} - I_= + I_g(V_0)] = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь внешнее воздействие приведено к току $I_{\text{вн}} = I_\sim \cos(\omega t + \varphi_{\text{вн}})$, $\psi = \varphi_{\text{вн}} - \varphi$. Величины $I_=$, R_0 и $t_0 = R_0 C_0$ характеризуют цепь задания смещения на контакт, причем емкость C_0 больше или равна собственной емкости контакта C_k. В уравнения (9) входят, кроме того, компоненты тока I_c

$$I^{\left\{\substack{(c)\\(s)}\right\}} = \left\langle I_c \begin{Bmatrix} \cos\Phi \\ \sin\Phi \end{Bmatrix} \right\rangle, \quad I^{(0)} = \langle I_c \rangle, \tag{7}$$

где $<\cdots>$ означает усреднение по Φ за период 2π. При простой зависимости (3) сверхпроводящего тока интегралы (7) вычисляются точно:

$$I^{\left\{\substack{(c)\\(s)}\right\}} = I_0 \begin{Bmatrix} \sin\theta\,(J_0 + J_2) \\ -\cos\theta\,(J_0 - J_2) \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

$$I^{(0)} = -I_0 \sin\theta\, J_1.$$

Здесь J_V — функции Бесселя первого рода от аргумента $a = \frac{A}{2V_0}$, а $\theta = \varphi - \varphi_0$, где

$$\varphi_0 = \frac{2e}{\hbar} \int (V_0 - V_1)\, dt. \tag{9}$$

Выражения (6), (8), (9) образуют полную систему уравнений относительно величин A, V_0, φ, φ_0[1]. Прежде чем приступить к их анализу, перейдем к медленному времени $\tau = \frac{\Omega t}{2}$ и новым обозначениям постоянного напряжения, расстройки и амплитуды внешней силы

$$v = \frac{V}{V_1}, \quad \Delta = 2\frac{\omega - \Omega}{\Omega}, \quad f = \alpha \frac{I_\sim}{I_0}.$$

В новых обозначениях запишем (точкой обозначено дифференцирование по τ):

$$\begin{gathered} \dot{a} + \frac{1}{Q} a + \alpha (J_0 + J_2) \sin\theta + f \cos\psi = 0, \\ a\dot{\varphi} + \Delta a + \alpha (J_0 - J_2) \cos\theta + f \sin\psi = 0, \\ \frac{1}{\lambda_0} \dot{v} + v + \frac{R_0}{V_1} (I_= - I_g - I_0 J_1 \sin\theta) = 0, \\ \dot{\varphi}_0 = 2(v - 1). \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь параметр $\lambda_0 = \frac{2}{\Omega t_0}$ характеризует скорость релаксации цепи смещения.

Автономная генерация

Рассмотрим вначале режим автономной джозефсоновской генерации как фон, на котором происходит детектирование. Полагая $f=0$, получаем из уравнений (10) следующие результаты.

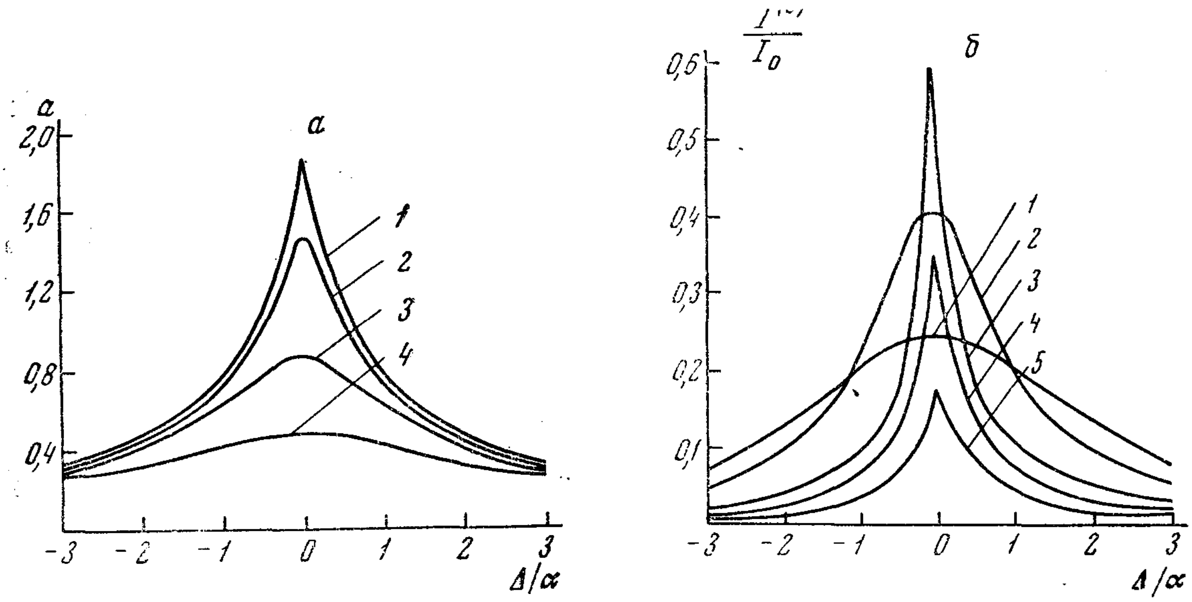
[1] Из условий применимости (5) укороченных уравнений (6) с учетом (8) непосредственно следует неравенство (4).

1. В стационарном режиме $\left(\frac{d}{d\tau} = 0\right)$ уравнения (10) разделяются. Для амплитуды колебаний a_0 и фазы θ_0 имеем два уравнения

$$a_0 + \alpha Q (J_0 + J_2) \sin \theta_0 = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\Delta}{\alpha} a_0 + (J_0 - J_2) \cos \theta_0 = 0.$$

Зависимость амплитуды от расстройки Δ (которая определяется отклонением напряжения V_0 от резонансного значения $V_\Omega = \frac{\hbar}{2e}\Omega$) изображена на рис. 1, *а*. Поскольку постоянная составляющая джозефсоновского тока определяется уравнением (8), можно построить и ВАХ кон-



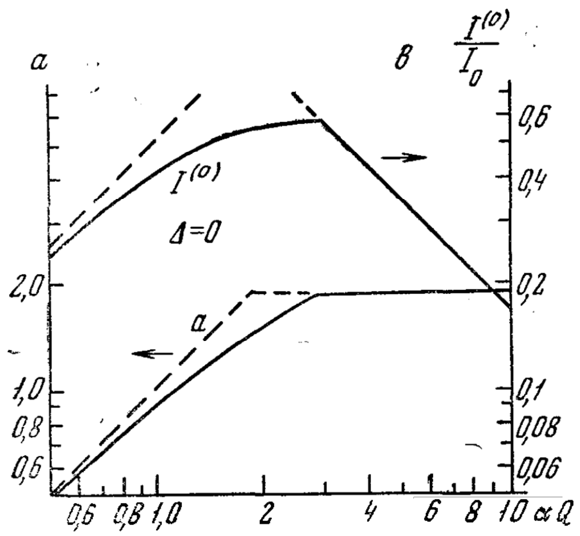


Рис. 1. Зависимость амплитуды колебаний (*а*, *в*) и постоянного тока (*б*, *в*) при автономной генерации от расстройки (*а*, *б*) и параметра αQ (*в*). Пунктиром показаны зависимости, даваемые формулами (13)—(14). *а* — αQ: *1* — ∞, *2* — 2, *3* — 1, *4* — 0,5; *б* — αQ: *1* — 0,5, *2* — 1, *3* — 2,92; *4* — 5, *5* — 10

такта: $I^{(0)} + I_g = F(V_0)$. Кривые $I^{(0)}(V_0)$ имеют вид резонансного выброса (рис. 1, *б*). На рис. 1, *в* показана зависимость максимального (по Δ) тока $I^{(0)}$ от параметра αQ. Эта кривая, как впервые показал И. О. Кулик [9], имеет максимум

$$I^0_{\max} = I_0 J_1(a_1) \simeq 0{,}58 I_0$$

при $\alpha Q = \frac{a_1^2}{2J_1(a_1)} \simeq 2{,}92$.

Поскольку $I^0 V_0$ есть полная энергия джозефсоновской генерации P_2, запишем $(P_2)_{\max} \simeq 0{,}58\, I_0 V_0$.

Эти результаты совпадают с результатами Вертхамера и Шапиро [10].

Уравнение (10) φ в стационарном случае является просто уравнением нагрузочной прямой (рис. 2, *а*):

$$F(V_0) \equiv I^{(0)} + I_g = I_= - \frac{V_0}{R_0}.$$

2. С помощью динамических уравнений (10) можно обычным методом [8] исследовать устойчивость генерации. Результатом такого рас-

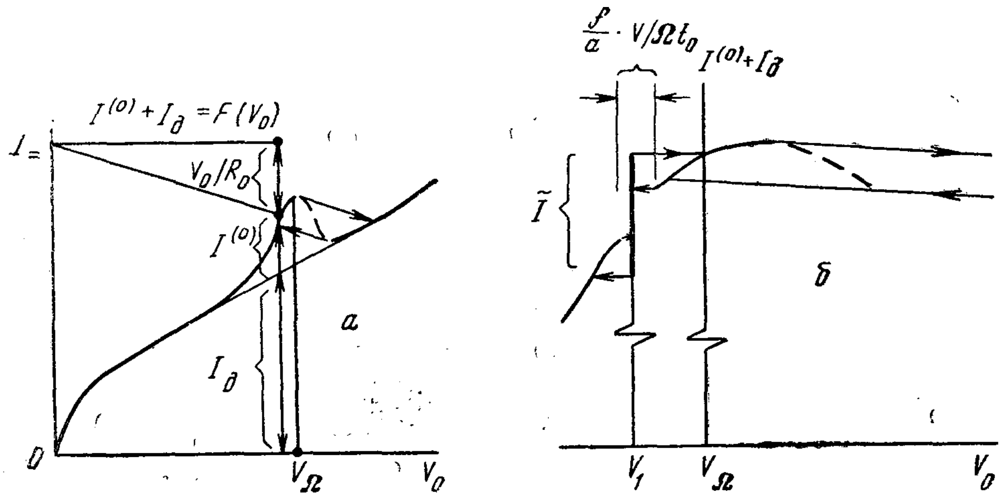


Рис. 2. ВАХ контакта в автономном случае (*а*) и при подаче внешнего сигнала на частоте $\omega<\Omega$ (*б*)

чета являются три условия, совместное выполнение которых необходимо и достаточно для устойчивости стационарного режима.

Первое из них выполняется всегда. Второе совпадает с обычным «геометрическим» критерием устойчивости (рис. 2):

$$\frac{d}{dV_0}(I^{(0)} + I_g) > -\frac{1}{R_0}.$$

Это условие всегда выполняется на левом склоне резонансного пика ($\Delta<0$). Наконец, третье условие устойчивости[1] имеет сложный вид, но также всегда выполняется на левом склоне, который, таким образом, устойчив при всех значениях параметров.

3. Из формул (11) и рис. 1 хорошо видно, что характер процессов в системе существенно зависит от величины αQ^2. Если $\alpha Q \ll 1$, то, как следует из (11), $a_0 \ll 1$ и

$$a_0 = \frac{\alpha Q}{\sqrt{1+\Delta^2 Q^2}}, \quad \theta_0 = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \Delta Q, \tag{12}$$

[1] Его нарушение приводит к сложным релаксационным процессам типа автомодуляции [8].

[2] В наиболее реальном случае, когда импеданс внешнего резонатора имеет индуктивный характер [5,11], $\rho = \frac{1}{\Omega c_k}$ и α имеет ясный физический смысл: $\alpha = \frac{I_0}{\Omega c_k V_0} = \left(\frac{\omega_l}{\Omega}\right)^2$, где ω_l — частота плазменных колебаний контакта [12, 13].

мы имеем дело просто с вынужденными колебаниями под действием джозефсоновского тока, обратная реакция которых сводится лишь к появлению постоянной составляющей тока

$$I^{(0)} = -I_0 \cdot \frac{a_0}{2}\sin\theta_0 = I_0 \frac{\alpha Q}{2(1+\Delta^2 Q^2)} \ll I_0. \tag{13}$$

Если $\alpha Q \gg 1$, то также легко найти асимптотические выражения для переменных

$$a_0 = a_1 \simeq 1{,}84, \quad \sin\theta_0 = -\frac{a_1^2}{2I_1(a_1)}\cdot\frac{1}{\alpha Q} \simeq -2{,}92\cdot\frac{1}{\alpha Q}, \quad I^{(0)} = \frac{I_0}{\alpha Q}\cdot\frac{a_1^2}{2}, \tag{14}$$

где a_1 — первый корень функции $I_1'(a)$.

Из сравнения выражений для тока $I^{(0)}$, даваемых функциями (13) и (14), с точным (рис. 1, *в*), видно, что эти приближения хорошо работают везде, кроме достаточно малой окрестности точки $\alpha Q = 1$.

Детектирование. Ступенька тока

Подача на систему внешнего сигнала частотой ω приводит к появлению на ВАХ контакта строго вертикальной ступеньки тока (рис. 3).

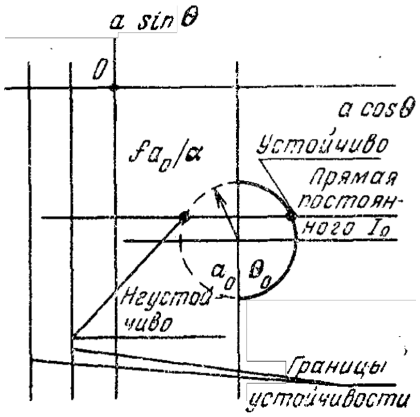


Рис. 3. Геометрическое место стационарных решений уравнений (15) на плоскости переменных a, θ (случай $\alpha Q \ll 1$)

Действительно, при $t=0$ в стационарном режиме $V_0 = V_1$ и двух уравнений (10) недостаточно для определения трех переменных a, θ, ψ. Таким образом, возможны различные решения этих уравнений, причем они соответствуют по (8) различным токам через контакт.

Размер ступеньки тока определяется разностью предельных значений $I^{(0)}$, при которых существует устойчивое стационарное решение этих уравнений. Рассмотрим опять два крайних случая.

При $a \ll 1$. Это реализуется, например, при $\alpha Q \ll 1$, $f \ll \alpha$. В этом случае все множество стационарных решений уравнений (10) можно представить как окружность на плоскости с полярными координатами $[a, \theta]$ (рис. 3). Центр ее лежит в точке $[a_0, \theta_0]$ (12), а радиус равен $\frac{fa_0}{\alpha}$. Любому значению тока в диапазоне

$$\left| I^{(0)} - I_0 \frac{\alpha Q}{2(1+\Delta^2 Q^2)} \right| < \frac{I_0 f Q}{2\sqrt{1+\Delta^2 Q^2}} \tag{15}$$

соответствуют два возможных стационарных решения. Исследование их устойчивости с помощью динамических уравнений (10) показывает, что одна из границ устойчивости проходит через центр окружности и устойчиво только правое из двух решений[1]. Таким образом, ступенька тока будет иметь полный размер:

$$\tilde{I} = \frac{\alpha Q I_{\sim}}{\sqrt{1+\Delta^2 Q^2}}. \tag{16}$$

---

[1] Анализ остальных трех условий устойчивости показывает, что при любых значениях параметров решения, лежащие на правой полуокружности (рис. 3), устойчивы, если $\Delta < 0$, т. е. ступенька расположена на левом склоне резонансного пика.

При $\alpha Q \gg 1$, $f \ll 1$. В этом случае решение на плоскости $[a, \theta]$ располагаются на эллипсе с центром в точке с координатами (15), с осями, параллельными осям $a\cos\theta$ и $a\sin\theta$ и величинами полуосей $\frac{f}{\alpha}\cdot\frac{a_1}{2I_1''(a_1)} \simeq 2{,}31\,\frac{f}{\alpha}$ и $\frac{f}{\alpha}\cdot\frac{a_1^2}{2I_1(a_1)} \simeq 2{,}91\,\frac{f}{\alpha}$. Правая половина этого эллипса, как и в случае $a \ll 1$, устойчива, и полная величина ступеньки тока будет

$$\tilde{I} = I_0\frac{f}{\alpha}a_1 = a_1 I_{\sim} \simeq 1{,}84 I_{\sim}. \tag{17}$$

Свяжем размеры ступеньки с величиной падающей мощности. Номинальная мощность источника сигнала равна

$$P = \frac{I_{\sim}^2}{8G_{\text{г}}} = \frac{1}{8\eta}\rho Q I_{\sim}^2,$$

где $G_{\text{г}}$ — внутренняя проводимость эквивалентного генератора, а $\eta \leqslant 1$ — часть потерь резонатора, вносимая этим генератором. Поэтому величина ступеньки:

$$\tilde{I} = \sqrt{\frac{8\eta P}{\rho Q}}\begin{cases}\alpha Q/\sqrt{1+\Delta^2 Q^2} & \text{при } \alpha Q \ll 1,\\ a_1 & \text{при } \alpha Q \gg 1.\end{cases} \tag{18}$$

Сравним эти значения с тем, которое получится при детектировании в нерезонансной системе. Предполагая, что контакт включен в длинную линию с волновым сопротивлением $\rho_{\text{л}} \ll \frac{V_0}{I_0}$, и используя равенства (2) и (3), получим

$$\tilde{I} = I_0\cdot\frac{\sqrt{8\rho_{\text{л}}P}}{V_0}. \tag{19}$$

Из сравнения выражений (18) и (19) с учетом обозначения (4) видно, что даже при равенстве волновых сопротивлений ρ и $\rho_{\text{л}}$ ступенька в резонаторе примерно в $\sqrt{Q}$ раз больше.

ВАХ в окрестности ступеньки

Пусть постоянное напряжение на контакте не совпадает с положением ступеньки V_1. Это можно формально учесть, если положить $\varphi_{\text{вн}} = \tilde{\omega} t$, где $\tilde{V} = \frac{\hbar}{2e}\tilde{\omega}$ есть расстояние до ступеньки.

Из уравнений (10) следует, что при $f \ll \alpha$ величины $a\cos\theta$ и $a\sin\theta$ будут совершать синусоидальные колебания с частотой вокруг автономных значений. Поэтому величина V_0 будет постоянна, если $\tilde{\omega} t_0 \gg 1$. Следовательно, уже на небольшом расстоянии от ступеньки ВАХ не изменяется при подаче внешнего сигнала. Однако на очень малых расстояниях ($\tilde{\omega} t_0 \sim 1$) величина V_0 также начинает совершать заметные колебания с частотой $\tilde{\omega}$. Это делает неустойчивой область ВАХ вблизи ступеньки, если $R_0 \neq 0$. Величина этой области: $\tilde{V}_{\text{н}} \simeq V_0\frac{f/\alpha}{\Omega t_0} \ll V_0$. Таким образом, при изменении тока смещения ВАХ в окрестности ступеньки обладает гистерезисным характером (рис. 2, *б*).

Времена релаксации (инерционность детектора)

Важной характеристикой детектора является время релаксации t_0, в нашем случае — время установления стационарного соотношения между $I^{(0)}$ и V_0. Это время можно получить из динамической системы уравнений (10), поскольку

$$t_p = \frac{2}{\Omega}\tau_p = \frac{2}{\Omega}\cdot\frac{1}{\min[Re(-\lambda_i)]},$$

где λ_i — корни характеристического уравнения 4-й степени системы (10), линеаризованной в окрестности стационарного решения. Анализ этого уравнения легко провести в наиболее реальном физическом случае достаточной инерционности цепи смещения: $\lambda_0 Q \ll 1$. При этом в качестве времени релаксации выступает большая из двух: постоянная величина цепи смещения $t_0 = R_0 C_0$ или величина t_f. Последняя обратно пропорциональна амплитуде действующего сигнала и зависит от положения стационарной точки на ступеньке тока, стремясь к бесконечности на ее концах. В середине ступеньки:

$$t_f = \frac{2V_0}{R_0 I_\sim}\cdot\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+\Delta^2 Q^2}}{\alpha Q} + 2\dfrac{R_0}{\rho}\alpha Q\dfrac{\Delta Q}{(1+\Delta^2 Q^2)^{3/2}} & \text{при } \alpha Q \ll 1,\\[2ex] \dfrac{1}{a_1} & \text{при } \alpha Q \gg 1.\end{cases} \tag{20}$$

Из выражений (16), (17) и (20) следует, что при достаточно малом сигнале и $\Delta Q \ll 1$ произведение величины ступеньки на время релаксации не зависит от величины сигнала и параметра αQ:

$$\widetilde{I} t_p = 2\frac{V_0}{R_0\Omega}.$$

Некоторые оптимальные соотношения

Рассмотрим вопрос о минимальной обнаружимой мощности. Из формулы (18) видно, что если флуктуации в системе обусловливают минимальную величину $\widetilde{I}_{\min}$ обнаружимой ступеньки тока, причем $\widetilde{I}_{\min}$ не зависит от расстройки Δ и добротности Q, то минимальное значение мощности достигается при $\Delta = 0$, $Q \approx \frac{1}{\alpha} = \frac{V_0}{\rho I_0}$:

$$P_{\min} \simeq \frac{1}{8\eta}\frac{V_0}{I_0}(\widetilde{I}_{\min})^2.$$

Например, если основным источником флуктуаций является сопротивление смещения R_0, а $t_0 \gg t_f$, то

$$(\widetilde{I}_{\min})^2 \simeq \frac{4kT}{R_0 t_0},$$

где T — температура сопротивления. В этом случае

$$P_{\min}\cdot t_p \approx \frac{1}{2\eta}\cdot\frac{V_0}{I_0 R_0}kT. \tag{21}$$

Так для реальных значений $V_0 = 2\cdot 10^{-4}$ *в* ($\Omega = 2\pi\cdot 10^{11}$ *сек*$^{-1}$), $I_0 = 10^{-8}$*а*, $R_0 = 10$ *ком*, $T = 300$°K имеем $P_{\min} t_p \sim 4\cdot 10^{-21}$ *вт·сек*.

Заключение

Основные характеристики резонансного джозефсоновского детектора хорошо поддаются расчету методом медленно меняющихся амплитуд. Единственным существенным ограничением на параметры системы является при этом условие (4) $\alpha \ll 1$. Однако данные, полученные при расчете на аналоговой машине Шапиро и Вертхамером [10], показывают, что наибольшее взаимодействие колебаний со слабым контактом происходит не при $\alpha \to \infty$, а при $\alpha \simeq 1$, т. е. в области, где укороченные уравнения по крайней мере качественно справедливы.

Внешнее монохроматическое излучение вызывает появление ступеньки тока на ВАХ контакта, причем она максимальна, если добротность системы $Q \simeq \frac{1}{\alpha}$.

Скорость релаксации не совпадает с диапазоном возможных принимаемых частот (как видно из (18), этот диапазон $\Delta\omega \cong h$) и определяется в основном или инерционностью цепи смещения, или (при малом входном сигнале) величиной t_f.

Ограничение (21) на чувствительность детектора, накладываемое тепловыми шумами цепи смещения, ослабевает при увеличении внутреннего сопротивления источника R_0. Таким образом, при $T \to 0$ (или $R_0 \to \infty$) чувствительность детектора должна ограничиваться собственными флуктуациями контакта [14—16].

ЛИТЕРАТУРА

1. Josephson B. D. Phys. Lett., 1, 251, 1962.
2. Shapiro S. Phys. Rev. Lett., 11, 80, 1963.
3. Лангенберг Д. и др. ТИИЭР, 54, 126, 1966.
4. Crimes C. C. a. o. Phys. Rev. Lett., 17, 431, 1966.
5. Краснополин И. Я., Хайкин М. С. Письма ЖЭТФ, 6, 633, 1967.
6. Ларкин А. И., Овчинников Ю. И. ЖЭТФ, 51, 1535, 1966.
7. Owen C. S., Scalapino D. J. Phys. Rev., 164, 164, 1967.
8. Каплан А. Е. и др. Параметрические генераторы и делители частоты. М., «Советское Радио», 1966.
9. Кулик И. О. ЖТФ, 37, 157, 1967.
10. Werthamer N. R., Shapiro S. Phys. Rev., 164, 523, 1967.
11. Mc Cumber D. E. J. Appl. Phys., 39, 297, 1968.
12. Josephson B. D. In Quantum Fluids, Amst., 1966, p. 174.
13. Dahm A. J. a. o. Phys. Rev. Lett., 20, 853, 1968.
14. Иванченко Ю. М. ЖЭТФ, 52, 1320, 1967; Письма ЖЭТФ, 6, 879, 1967.
15. Ларкин А. И., Овчинников Ю. И. ЖЭТФ, 53, 2159, 1967.
16. Fetter A. L., Stephen M. J. Phys. Rev., 168, 475, 1968.

Поступила в редакцию
12.3 1969 г.

Кафедра
физики колебаний