Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1969

УДК 530.12:531.51

В. А. БАРЫНИН

ТРЕХМЕРНЫЙ ХРОНОМЕТРИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫЙ ДВУХМЕТРИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Предлагается трехмерный хронометрически инвариантный двухметрический формализм, позволяющий придать всем величинам общей теории относительности инвариантные свойства по отношению к произвольным преобразованиям времени и чисто пространственных координат, т. е. (в отличие от обычного двухметрического формализма) лишь по отношению к таким преобразованиям координат и времени, которые лишены физического содержания.

В общей теории относительности существует ряд нетензорных величин, связанных с нетензорностью символов Кристоффеля. Это привело к созданию двухметрического формализма [1, 2], в котором этим величинам приданы тензорные свойства относительно произвольных четырехмерных преобразований координат:

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{\beta}) \qquad (1)$$

(греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — 1, 2, 3).

На наш взгляд не следует требовать, чтобы указанные величины обладали тензорными свойствами по отношению к преобразованиям (1). Дело в том, что среди них существуют преобразования, описывающие переход к произвольно движущейся, относительно исходной, системе отсчета. Требование тензорности относительно этих преобразований приводит поэтому к исключению из теории всех эффектов инерции.

С другой стороны, из всего многообразия произвольных преобразований вида (1) можно выделить такие, которые не имеют физического содержания. Это преобразования вида:

$$x'^{e} = x'^{e}(x^{k}), \quad t' = t'(x^{k}, t), \qquad (2)$$

описывающие лишь «перенумерацию» пространственно-временной координатной сетки.

Поэтому естественно излагать теорию гравитации на языке тензорных по отношению к пространственной и инвариантных по отношению к временной части этого преобразования величин, т. е. на языке хронометрически инвариантных (х. и.) трехмерных тензоров.

Системы отсчета

Зададим некоторое произвольное многообразие заполняющих все трехмерное пространство точек, которое будем называть базисом системы отсчета. Произведем, далее, произвольную арифметизацию базиса, сопоставив каждой точке три пространственные координаты и часы, показывающие местное время t. Введем некоторые функции координат и времени τ_0 и τ_k, определяющие бесконечно малый интервал инвариантного времени между двумя событиями, происшедшими в двух бесконечно близких точках

$$dT = \tau_\alpha dx^\alpha, \tag{3}$$

задавая, таким образом, временную метрику $(x^0 \equiv t)$.

Введем некоторую матрицу ε_{ik}, также зависящую от координат и времени, которая будет определять расстояние между двумя, вообще говоря, движущимися бесконечно близкими точками, т. е. расстояние между теми точками базиса, через которые прошли движущиеся точки в один и тот же момент инвариантного времени T по формуле:

$$dL = \sqrt{\varepsilon_{ik} dx^i dx^k}, \tag{4}$$

задавая таким образом пространственную метрику.

Чтобы величины dT и dL не зависели ни от выбора базиса, ни от способа его арифметизации (так как и то и другое произвольно) наложим на них естественное требование инвариантности относительно общих преобразований координат и времени (1), описывающих как изменение самого базиса, так и переход к другой его арифметизации. Тогда из (3) и (1) получаем закон преобразования τ_α

$$\tau'_\beta = \tau_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}. \tag{5}$$

Далее, из инвариантности dL имеем

$$\varepsilon'_{lm} = \frac{\partial^* x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial^* x^k}{\partial x'^m} \varepsilon_{ik}, \tag{6}$$

где $\partial^*/\partial x'^l$ — производная (хронометрически инвариантная) по x'^l при $T = \text{const}$, т. е. хронически инвариантная (см. (9)).

Отметим, что введенные таким образом пространственная и временная метрики играют ту же роль, что и вторая четырехмерная метрика в обычном двухметрическом формализме. Совокупность базиса и двух (пространственной и временной) метрик будем называть системой отсчета.

Отметим полный произвол в выборе той или иной конкретной системы отсчета. По этой причине будем требовать, чтобы уравнения, описывающие реальный материальный объект, были инвариантны относительно такого выбора, т. е. были инвариантны относительно общего преобразования координат и времени (1) и выбора пространственной и временной метрик.

Что касается самих величин, описывающих этот объект, то они, естественно, должны зависеть от выбора пространственной и временной метрик и, по-видимому, могут зависеть от выбора базиса системы отсчета. Однако они должны быть инвариантны относительно преобразований координат и времени вида (2), описывающих лишь переход к другой арифметизации того же базиса. Точнее, они должны быть, как уже было сказано, х. и. тензорами относительно его пространственной части.

Хронометрически инвариантные величины и операции

К х. и. величинам и операциям дифференцирования, соответствующим выбранной временной метрике, можно перейти от обычных четырехмерных с помощью точечного преобразования (вообще говоря неголономного), прямая и обратная матрицы A^{μ}_{α} и B^{α}_{μ} которого имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} &A^0_0 = \tau_0, \quad A^0_k = \tau_k, \quad A^k_0 = 0, \quad A^i_k = \delta^i_k; \\ &B^0_0 = \frac{1}{\tau_0}, \quad B^0_k = -\frac{\tau_k}{\tau_0}, \quad B^k_0 = 0, \quad B^i_k = \delta^i_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим, что при произвольных преобразованиях времени величины A^{μ}_{α} и B^{α}_{μ} ведут себя как 4-векторы по индексам α и инвариантны по индексам μ, в чем легко убедиться, воспользовавшись (5) и (7).

Построим из произвольного 4-тензора $T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}$ величины

$$\overset{*}{T}{}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots} = A^{\mu}_{\alpha} \ldots B^{\beta}_{\nu} \ldots T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}. \tag{8}$$

В силу сделанного выше замечания все они хронометрически инвариантны.

Рассмотрим их трансформационные свойства по отношению к общим преобразованиям (1). После несложных вычислений получаем

$$\overset{*}{T}{}'^{\lambda\ldots}_{\varepsilon\ldots} = \alpha^{\lambda}_{\mu} \ldots \beta^{\nu}_{\varepsilon} \ldots \overset{*}{T}{}^{\mu\ldots}_{\nu\ldots},$$

где

$$\alpha^{\lambda}_{\mu} = \frac{\partial^* x'^e}{\partial x^{\mu}} \delta^{\lambda}_e + \delta^0_{\mu}\delta^{\lambda}_0,$$

$$\beta^{\nu}_{\varepsilon} = \frac{\partial^* x^n}{\partial x'^{\varepsilon}} \delta^{\nu}_n + \delta^0_{\varepsilon}\delta^{\nu}_0.$$

Х. и. производные получаются также по правилу (8) или в трехмерной записи:

$$\frac{\partial^*}{\partial t} = \frac{1}{\tau_0}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial^*}{\partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x^m} - \frac{\tau_m}{\tau_0}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{9}$$

Построим х. и. аналог символов Кристоффеля

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\lambda} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} A^{\lambda}_{\alpha} B^{\beta}_{\mu} B^{\gamma}_{\nu} + A^{\lambda}_{\alpha} \frac{\partial^* B^{\alpha}_{\nu}}{\partial x^{\mu}}. \tag{10}$$

После ряда вычислений выражение (10) можно записать так:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\lambda} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} + \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} + S^{\lambda}_{\mu\nu}, \tag{11}$$

где

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\overset{*}{g}{}^{\lambda\varepsilon}\left(\frac{\partial^* \overset{*}{g}_{\varepsilon\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^* \overset{*}{g}_{\varepsilon\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial^* \overset{*}{g}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varepsilon}}\right), \tag{12}$$

$$\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \overset{*}{g}{}^{\lambda\varepsilon} (\overset{*}{g}_{\mu\alpha} S^{\alpha}_{\varepsilon\nu} + \overset{*}{g}_{\varepsilon\nu} + \overset{*}{g}_{\nu\alpha} S^{\alpha}_{\varepsilon\mu}), \qquad (13)$$

$$S^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} B^{\alpha}_{\mu} B^{\beta}_{\nu} \left(\frac{\partial A^{\lambda}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial A^{\lambda}_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \right), \qquad (14)$$

причем, $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ симметричны по нижним индексам, а $S^{\lambda}_{\mu\nu}$—антисимметричны. Величины $\overset{*}{g}{}^{\alpha\beta}$ и $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$, играющие роль х. и. потенциалов гравитационного поля, построены из $g^{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ по правилу (8).

Все компоненты $S^{\lambda}_{\mu\nu}$ хронометрически инвариантны, что становится очевидным из (14), где выражение в скобках есть 4-тензор по индексам α и β по отношению к произвольным преобразованиям времени. Поэтому все $\overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ хронометрически инвариантны.

Из всех $S^{\lambda}_{\mu\nu}$ отличны от нуля лишь следующие:

$$S^{0}_{k0} = \frac{1}{2\tau_0} \left(\frac{\partial \tau_k}{\partial t} - \frac{\partial \tau_0}{\partial x^k} \right),$$

$$S^{0}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \tau_k}{\partial x^i} \right) + \tau_i S^{0}_{k0} - \tau_k S^{0}_{i0},$$

причем все они, во-первых, являются тензорами по отношению к чисто пространственным преобразованиям координат и, во-вторых, обращаются в нуль в том случае, если dT представляет собой полный дифференциал, т. е. преобразование (7) голономно.

Заметим также, что неголономность преобразования (7) приводит к тому, что результат двойного дифференцирования зависит от порядка производных. Тогда запишем соотношение

$$\frac{\partial^*}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial^*}{\partial x^{\nu}} \right) - \frac{\partial^*}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial^*}{\partial x^{\mu}} \right) = 2 S^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{\partial^*}{\partial x^{\lambda}}.$$

Четырехмерная метрика системы отсчета

Для того чтобы иметь возможность пользоваться наиболее компактной четырехмерной формой записи, построим из компонентов пространственной и временной метрик системы отсчета четырехмерную матрицу $E_{\alpha\beta}$, являющуюся аналогом второй метрики в обычном двухметрическом формализме, по правилу

$$E_{ik} = \tau_i \tau_k - \varepsilon_{ik}, \quad E_{k0} = E_{0k} = \tau_0 \tau_k, \quad E_{00} = \tau_0^2.$$

Такая форма четырехмерной метрики определяется из условия, чтобы ее х. и. аналог $\overset{*}{E}_{\mu\nu}$, образуемый из $E_{\alpha\beta}$ по правилу (8), имел вид

$$\overset{*}{E}_{ik} = -\varepsilon_{ik}, \quad \overset{*}{E}_{k0} = \overset{*}{E}_{0k} = 0, \quad \overset{*}{E}_{00} = 1,$$

позволяющий представить четырехмерный интервал системы отсчета $d\sigma^2 = E_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ в виде

$$d\sigma^2 = dT^2 - dL^2,$$

где dT и dL определяются выражениями (3) и (4).

Отметим то существенное обстоятельство, что матрица является четырехмерным тензором лишь по отношению к преобразованиям вида (2) (но не (10)!), в чем легко убедиться, воспользовавшись формулами (5) и (6).

Из метрики $E_{\alpha\beta}$ можно построить величины

$$F^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} E^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial E_{\beta\delta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial E_{\gamma\delta}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial E_{\beta\gamma}}{\partial x^{\delta}} \right),$$

которые будут вести себя как обычные символы Кристоффеля по отношению к преобразованиям (2). Их х. и. аналоги $\overset{*}{F}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ можно получить по формулам (10), (11) и (12), заменив в них все Γ на F, а g на E.

Частица в гравитационном поле

Уравнения движения частицы в гравитационном поле, следующие из вариационного принципа:

$$\delta S = -m\delta \int \frac{ds}{dT} dT = 0$$

имеют вид

$$\frac{d}{dT}(MU^{\alpha}) + M\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} U^{\beta} U^{\gamma} = 0, \tag{15}$$

где

$$U^{\gamma} = \frac{dx^{\gamma}}{dT}, \quad M = \frac{m}{\beta},$$

$$\beta = \frac{ds}{dT} = \sqrt{g_{\alpha\beta} U^{\alpha} U^{\beta}}.$$

Переписывая его в духе двухметрического формализма и подвергая точечному преобразованию (7), получим уравнение

$$\frac{D}{dT}(M\overset{*}{U}{}^{\lambda}) + M\overset{*}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu} \overset{*}{U}{}^{\mu} \overset{*}{U}{}^{\nu} = 0,$$

где

$$\overset{*}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu} = \overset{*}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu} - \overset{*}{F}{}^{\lambda}_{\mu\nu},$$

а $\frac{D}{dT}$ — операция абсолютного (в смысле связности $\overset{*}{F}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$) х.и. дифференцирования по инвариантному времени T.

Как и в обычном двухметрическом формализме, здесь имеет место формула

$$\overset{*}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \overset{*}{g}{}^{\lambda\varepsilon} (D_{\nu} \overset{*}{g}_{\varepsilon\mu} + D_{\mu} \overset{*}{g}_{\varepsilon\nu} - D_{\varepsilon} \overset{*}{g}_{\mu\nu}),$$

где D_{ν} — операция х. и. E-ковариантного дифференцирования по x^{ν}, являющаяся тензорной лишь по отношению к чисто пространственным преобразованиям координат и скалярной по отношению к преобразованиям времени.

Замечая, что $\overset{*}{U}{}^{0} \equiv 1$ и $\overset{*}{U}{}^{m} = v^{m}$ — компоненты трехмерной х. и. скорости частицы, уравнения (14) можно переписать в трехмерной форме для $\lambda = e$ следующим образом:

$$\frac{D}{dT}(Mv^{e}) = -M(\overset{*}{\Pi}{}^{e}_{00} + 2\overset{*}{\Pi}{}^{e}_{m0} v^{m} + \overset{*}{\Pi}{}^{e}_{mn} v^{m} v^{n}). \tag{16}$$

Все члены этого уравнения являются х. и. трехмерными векторами, что позволяет интерпретировать его правую часть как трехмерную силу, а M как массу частицы в гравитационном поле.

Кроме того, так как $\overset{*}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ не является тензором относительно общих преобразований (1), правая часть уравнения (16) содержит в себе силу инерции.

Уравнения поля

По аналогии с обычным двухметрическим формализмом в данном случае имеет место формула

$$\overset{*}{R}{}^{\varepsilon}_{\mu\lambda\nu} - \overset{*}{r}{}^{\varepsilon}_{\mu\lambda\nu} = p^{\varepsilon}_{\mu\lambda\nu},$$

где $\overset{*}{R}{}^{\varepsilon}_{\mu\lambda\nu}$ и $\overset{*}{r}{}^{\varepsilon}_{\mu\lambda\nu}$ — х. и. аналоги соответствующих тензоров кривизны, построенных из $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и соответственно, а

$$\overset{*}{P}{}^{\varepsilon}_{\mu\lambda\nu} = D_{\lambda}\overset{*}{\Pi}{}^{\varepsilon}_{\mu\nu} - D_{\nu}\overset{*}{\Pi}{}^{\varepsilon}_{\mu\lambda} + \overset{*}{\Pi}{}^{\varepsilon}_{\rho\lambda}\,\overset{*}{\Pi}{}^{\rho}_{\mu\nu} - \overset{*}{\Pi}{}^{\varepsilon}_{\rho\nu}\,\overset{*}{\Pi}{}^{\rho}_{\mu\lambda}.$$

Таким образом, известные уравнения гравитационного поля могут быть представлены в виде

$$\overset{*}{P}_{\mu\nu} + \overset{*}{r}_{\mu\nu} = \varkappa\left(\overset{*}{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\overset{*}{g}_{\mu\nu}\,\overset{*}{T}\right).$$

При этом они зависят лишь от х.и. потенциалов гравитационного поля $\overset{*}{g}_{\mu\nu}$ и их х.и. E-ковариантных производных и пространственно-временной метрики системы отсчета. Если выбранная система отсчета имеет плоскую метрику ε_{ik}, не деформируется (в том смысле, что $\partial^{*}\varepsilon_{ik}/\partial t = 0$) и допускает синхронизацию часов во всем пространстве (т. е. $S^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$), то $\overset{*}{r}{}^{\varepsilon}_{\mu\lambda\nu} = 0$, что аналогично выбору второй метрики в обычном двухметрическом формализме плоской.

Таким образом, трехмерный х.и. двухметрический формализм позволяет придать описанию гравитационного поля свойства инвариантности относительно таких (и только таких, в отличие от обычного двухметрического формализма) преобразований координат и времени, которые не имеют физического содержания.

Кроме того, в соответствии со своим названием, трехмерный х.и. двухметрический формализм позволяет интерпретировать теорию гравитационного поля в трехмерном пространстве, так как в этом формализме все величины и операции, получаемые из четырехмерных при разделении значений индексов на временные и пространственные являются по этим индексам трехмерными х.и. скалярами и тензорами соответственно.

Предложенный выше способ построения х.и. величин из обычных четырехмерных является обобщением способа, предложенного А. Л. Зельмановым [3] в том смысле, что позволяет сделать это для произвольной временной метрики. При специальном же выборе компонентов временной метрики, именно при $\tau_{\alpha} = g_{\alpha_0}/\sqrt{g_{00}}$, он совпадает, как нетрудно проверить, с последним.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosen N. Phys. Rev., **57**, 147, 1940.
2. Пугачев Я. И. «Изв. вузов», физика, **6**, 152, 1959.
3. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, 815, 1956.

Поступила в редакцию
19.3 1969 г.

Кафедра
теоретической физики