ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1969

УДК 521.401

А. А. ОРЛОВ

О ВЛИЯНИИ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ СОЛНЕЧНОЙ ОРБИТЫ НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ

Метод Цейпеля приложен к уравнениям движения спутников планет, возмущаемых Солнцем, орбита которого считается эллиптической. Получены члены преобразованной функции Гамильтона до третьего порядка малости включительно. Эксцентриситет солнечной орбиты учитывается строго.

В статье применен метод Цейпеля [1] к исследованию влияния эллиптичности солнечной орбиты на движение спутников планет. Этот метод, успешно использованный Брауэром [2] и рядом других авторов для учета возмущений в движении искусственных спутников Земли, вызываемых ее сжатием, применялся также и к задаче, рассматриваемой в настоящей работе.

Так Хори [3] приложил метод Цейпеля к случаю движения спутника в плоскости орбиты Солнца. Далее, мной [4, 5] и И. Ковалевским [6, 7] независимо друг от друга рассмотрен случай пространственного движения спутника без учета эксцентриситета солнечной орбиты. В этих работах показано, что, если ограничиться членами третьего порядка относительно параметра $m=n_2/n_1$, где n_2 и n_1 — средние движения Солнца и спутника, то задача решается в эллиптических квадратурах. В [4 и 5] выполнен качественный анализ решения и получена система формул, представляющих это решение в эллиптических функциях Якоби. Аналогичная работа выполнена и Ковалевским, но только при получении решения он использовал функции Вейерштрасса. Кроме того, в работе [7] Ковалевский рассматривал случай движения Солнца по эллиптической орбите. В этой работе с помощью метода Цейпеля преобразована функция Гамильтона с точностью до членов второго порядка относительно m включительно. Члены третьего порядка относительно m там приводятся без вывода и без учета эксцентриситета орбиты Солнца e_2. Правда, в работе [7] указывается, что при отличном от нуля значении e_2 квадрат параметра m должен быть умножен на $(1-e_2^2)^{-3/2}$. Однако при строгом учете эксцентриситета орбиты Солнца в выражение преобразованной функции Гамильтона войдет еще целый ряд членов третьего порядка относительно m, содержащих множителем e_2^2.

В настоящей работе учет членов, зависящих от эксцентриситета солнечной орбиты, выполнен строго: разложения в ряды по степеням e_2

не используются. Так же, как в [4 и 5], результаты данного исследования справедливы при любом наклоне и эксцентриситете орбиты спутника.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения спутника

Используем канонические элементы Делоне [8]. Дифференциальные уравнения движения спутника в этих элементах имеют вид

$$\frac{dL}{d\tau} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial l}, \quad \frac{dG}{d\tau} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial g}, \quad \frac{dH}{d\tau} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial h},$$

$$\frac{dl}{d\tau} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial L}, \quad \frac{dg}{d\tau} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial G}, \quad \frac{dh}{d\tau} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial H}, \tag{1}$$

где

$$\tau = n(t - t_0), \quad m = \frac{n_2}{n},$$

причем t — время, t_0 — его начальное значение, n — среднее движение спутника, n_2 — среднее движение Солнца.

Функция Гамильтона $\bar{F}$ имеет следующий вид:

$$\bar{F} = \frac{\mu^2}{2L^2} + \gamma m^2 \frac{L^4}{\mu^2}\left(\frac{a_2}{r_2}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta) + \ldots, \tag{2}$$

где

$$\mu = \frac{f(m_0 + m_1)}{n^2}, \quad \gamma = \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2},$$

f — постоянная тяготения, m_0, m_1 и m_2 — соответственно массы планеты, спутника и Солнца, a и a_2 — большие полуоси орбит спутника и Солнца, r — расстояние спутника от центра планеты, r_2 — расстояние Солнца от центра масс системы планета—спутник.

Далее: $\cos\theta = \cos u \cos w + \sin u \sin w \cos i$, $u = g + v$, $w = v_2 - (h - \omega_2)$, где v и v_2 — истинные аномалии спутника и Солнца, i — угол наклона оскулирующей орбиты спутника к плоскости движения Солнца, g — аргумент перицентра оскулирующей орбиты спутника, ω_2—долгота перицентра орбиты Солнца.

Введем вместо функции h новую переменную, равную разности $h—\omega_2$. Так как ω_2 — величина постоянная, то уравнения (1) сохранят свою форму и после замены h на $h—\omega_2$. Не будем вводить специального обозначения для новой искомой функции $h—\omega_2$, а сохраним для нее символ h. Для того чтобы избавиться от явной зависимости функции $\bar{F}$ от времени, входящего посредством истинной аномалии Солнца v_2, введем, как обычно, вспомогательную пару канонических переменных Λ и λ, положив $\lambda = M_2$, где M_2 — средняя аномалия Солнца. Тогда новая функция Гамильтона получит вид $F = -m\Lambda + \bar{F}$, где $\bar{F}$ определяется формулой (2). Система дифференциальных уравнений (1) пополнится при этом двумя новыми уравнениями

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad \frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial \Lambda}. \tag{3}$$

Значит в правых частях уравнений (1) нужно писать вместо функции $\bar{F}$ функцию F.

Будем применять метод Цейпеля к системе дифференциальных уравнений (1) и (3) в два этапа. На первом этапе будут найдены первые члены разложения функции Гамильтона, не содержащей переменную l. На втором — будет получена функция Гамильтона, не содержащая также и переменную λ.

§ 2. Первое преобразование

Обозначим через $R = R(L', G', H', \Lambda', l, g, h, \lambda$, определяющую функцию, с помощью которой осуществляется переход к новым каноническим переменным $L', G', H', \Lambda', l', g', h', \lambda'$:

$$L = \frac{\partial R}{\partial l}, \quad G = \frac{\partial R}{\partial g}, \quad H = \frac{\partial R}{\partial h}, \quad \Lambda = \frac{\partial R}{\partial \lambda},$$

$$l' = \frac{\partial R}{\partial L'}, \quad g' = \frac{\partial R}{\partial G'}, \quad h' = \frac{\partial R}{\partial H'}, \quad \lambda' = \frac{\partial R}{\partial \Lambda'}.$$

Потребуем, чтобы преобразованная функция Гамильтона Φ не зависела от переменной l':

$$\Phi = \Phi(L', G', H', \Lambda', g', h', \lambda').$$

Допустим, что функции R и Φ могут быть разложены в ряды по степеням параметра m:

$$R = R_0 + mR_1 + m^2R_2 + m^3R_3 + \ldots,$$

$$\Phi = \Phi_0 + m\Phi_1 + m^2\Phi_2 + m^3\Phi_3 + \ldots$$

и положим

$$R_0 = L'l + G'g + H'h + \Lambda'\lambda.$$

Введем обозначения

$$F_0 = \frac{\mu^2}{2L^2}, \quad F_1 = -\Lambda, \quad F_2 = \gamma \frac{L^4}{\mu^2}\left(\frac{a_2}{r_2}\right)^3 \left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta). \tag{4}$$

Вспомогательная каноническая переменная Λ входит только в F_1. Остальные же величины (4) от Λ не зависят.

Используя обычную процедуру метода Цейпеля, получим уравнения для определения Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 и R_1, R_2, R_3, ... Прежде всего $\Phi_0 = F_0(L')$, или $\Phi_0 = \mu_2/2L'^2$. Далее находим:

$$-\frac{\mu^2}{L'^3}\frac{\partial R_1}{\partial l} + F_1 = \Phi_1.$$

Так как F_1 не содержит периодических членов относительно l, то получим $\Phi_1 = -\Lambda'$ и $\partial R_1/\partial l = 0$. Отсюда следует, что R_1 является произвольной функцией переменных L', G', H', Λ', g, h, λ. Будем считать, что $R_1 = 0$.

С учетом этого равенства можно записать

$$-\frac{\mu^2}{L'^3}\frac{\partial R_2}{\partial l} + F_2 = \Phi_2, \tag{5}$$

$$-\frac{\mu^2}{L'^3}\frac{\partial R_3}{\partial l} - \frac{\partial R_2}{\partial \lambda} = \Phi_3. \tag{6}$$

Из соотношения (5) находим $\Phi_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_2 dl$. Выполнив интегрирование, получим

$$\Phi_2 = \frac{1}{16}\gamma\frac{L'^4}{\mu^2}\left(\frac{a_2}{r_2}\right)^3[A(5-3\eta'^2)+15B(1-\eta'^2)],$$

где

$$A = (-1+3c'^2)+3(1-c'^2)\cos 2w',$$

$$B = [(1-c'^2)+(1+c'^2)\cos 2w']\cos 2g' + 2c'\sin 2w'\sin 2g'.$$

Уравнение (5) можно написать в виде

$$\frac{\partial R_2}{\partial l} = \frac{L'^2}{\mu^2}\left(F_2 - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F_2 dl\right).$$

Отсюда, интегрируя, находим

$$R_2 = \frac{1}{96}\gamma\frac{L'^7}{\mu^4}\left(\frac{a_2}{r_2}\right)^3\{A[(-24e'+9e'^3)\sin E + 9e'^2\sin 2E - e'\sin 3E] +$$
$$+ B[(-90e'+45e'^3)\sin E + (18+9e'^2)\sin E - 3(2e'-e'^3)\sin 3E] +$$
$$+ C\eta'[45e'^2+90e'\cos E - 18(1+e'^2)\cos 2E + 6e'\cos 3E]\} + \widetilde{C}_2, \quad (7)$$

где

$$e'^2 = 1-\eta'^2,\ c' = \frac{H'}{G'},\ \eta' = \frac{G'}{L'},$$

$$C = -(1-c'^2)\sin 2g - (1+c'^2)\cos 2w\sin 2g + 2c'\sin 2w\cos 2g.$$

Величина E определяется следующим уравнением: $E - e'\sin E = l$.

Совокупность членов в фигурных скобках в правой части равенства (7) не содержит вековых слагаемых относительно l. Через $\widetilde{C}_2$ обозначена произвольная функция переменных L', G', H', Λ', g, h, λ.

Обращаясь к уравнению (6), замечаем, если функция $\widetilde{C}_2 = 0$, то и $\Phi_3 = 0$, так как в этом случае $\partial R_2/\partial\lambda$ не будет содержать векового члена относительно l. Если же $\widetilde{C}_2$ отлична от нуля, то

$$\Phi_3 = -\frac{\partial\widetilde{C}_2}{\partial\lambda'}.$$

Без особых затруднений можно получить и функцию R_3. Однако мы не будем здесь приводить ее значения.

§ 3. Второе преобразование

Исключим из функции Гамильтона угловую переменную λ'.

Предположим, что переход к новым каноническим переменным L'', G'', H'', Λ'', l'', g'', h'', λ'' осуществляется с помощью определяющей функции $S = S(L'', G'', H'', \Lambda'', l', g', h', \lambda')$:

$$L' = \frac{\partial S}{\partial l},\ G' = \frac{\partial S}{\partial g'},\ H' = \frac{\partial S}{\partial h'},\ \Lambda' = \frac{\partial S}{\partial\lambda'},$$

$$l'' = \frac{\partial S}{\partial L''},\ g'' = \frac{\partial S}{\partial G''},\ h'' = \frac{\partial S}{\partial H''},\ \lambda'' = \frac{\partial S}{\partial\Lambda''}.$$

Обозначим через $\Psi = \Psi(L'', G'', H'', \Lambda'', g'', h'')$ преобразованную функцию Гамильтона. Предположим, что функции S и Ψ могут быть представлены в виде рядов по степеням параметра m:

$$S = S_0 + mS_1 + m^2S_2 + \ldots,$$

$$\Psi = \Psi_0 + m\Psi_1 + m^2\Psi_2 + m^3\Psi_3 + \ldots, \tag{8}$$

причем $S_0 = L''l' + G''g' + H''h' + \Lambda''\lambda'$.

Не давая подробных выкладок, выпишем уравнения, служащие для определения нескольких первых членов рядов (8)

$$\Psi_0 = \Phi_0(L''), \quad (9) \qquad \Psi_1 = \Phi_1(\Lambda''), \tag{10}$$

$$-\frac{\partial S_1}{\partial \lambda'} + \Phi_2 = \Psi_2. \tag{11}$$

$$-\frac{\partial S_2}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial G''}\frac{\partial S_1}{\partial g'} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial H''}\frac{\partial S_1}{\partial h'} - \frac{\partial \widetilde{C}_2}{\partial \lambda'} = \Psi_3 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial g'}\frac{\partial S_1}{\partial G''} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial h'}\frac{\partial S_1}{\partial H''}.$$

Из уравнений (9) и (10) следует:

$$\Psi_0 = \frac{\mu^2}{2L''^2}, \quad \Psi_1 = \Lambda'',$$

а из уравнения (11):

$$\Psi_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_2 d\lambda',$$

или

$$\Psi_2 = \frac{1}{16}\gamma\sqrt{\frac{a_2^3}{p_2^3}}\frac{L''^4}{\mu^2}[(-1 + 3c''^2)(5 - 3\eta''^2) +$$

$$+ 15(1 - c''^2)(1 - \eta''^2)\cos 2g'']. \tag{12}$$

Выделяя в уравнении (11) периодическую часть функции Φ_2 и интегрируя, получим

$$S_1 = \frac{1}{16}\gamma\sqrt{\frac{a_2^3}{p_2^3}}\frac{L''^4}{\mu^2}\Big\{P_0(v_2' - \lambda' + e_2 \sin v_2') +$$

$$+ P_1\left[-\frac{1}{2}e_2\sin(2h' - v_2') - \frac{1}{2}\sin(2h' - 2v_2') - \frac{1}{6}e_2\sin(2h' - 3v_2')\right] +$$

$$+ P_2\left[\frac{1}{2}e_2\cos(2h' - v_2') + \frac{1}{2}\cos(2h' - 2v_2') + \frac{1}{6}e_2\cos(2h' - 3v_2')\right]\Big\},$$

причем

$$P_0 = (-1 + 3c''^2)(5 - 3\eta''^2) + 15(1 - c''^2)(1 - \eta''^2)\cos 2g',$$

$$P_1 = 3(1 - c''^2)(5 - 3\eta''^2) + 15(1 - c''^2)(1 - \eta''^2)\cos 2g',$$

$$P_2 = -30c''(1 - \eta''^2)\sin 2g'.$$

Вычисление функций Ψ_3 и S_2 требует более кропотливой работы. Приведем окончательное выражение Ψ_3:

$$\Psi_3 = \frac{9}{128}\gamma^2\left(\frac{a_2}{p_2}\right)^3\frac{L''^7}{\mu^4}\eta''\left\{\left(1 + \frac{2}{3}e_2^2\right)c''[35 - 33\eta''^2 + (15 - 17\eta''^2)c''^2 +\right.$$

$$+ 15(1 - c''^2)(1 - \eta''^2)\cos 2g''] + \frac{e_2^2}{2}[2c''(1 - c''^2)(15 - 17\eta''^2)\cos 2h'' +$$

$$+ 15(1 - c''^2(2 + 3c'')(1 - \eta''^2)\cos(2h'' - 2g'') -$$

$$- 15(1 + c''^2(2 - 3c'')(1 - \eta''^2)\cos(2h'' + 2g'')]\Big\}, \qquad (13)$$

причем h'' — разность между долготой восходящего узла орбиты спутника и долготой перицентра солнечной орбиты.

Сравнивая формулы (12) и (13) с равенством (4,9) и (4,10) работы [4], видим, что член второго порядка в выражении Ψ с точностью до постоянного множителя $\sqrt{a_2^3/p_2^3} = (1 - e_2^2)^{-3/2}$ совпадает с соответствующим членом функции Ψ, полученной без учета эксцентриситета солнечной орбиты. Иначе обстоит дело с членом Ψ_3. От выражения (3.10) работы [4] он отличается наличием ряда дополнительных слагаемых, содержащих переменную h''. Совокупность же членов Ψ_3, не содержащая h'', получается из соответствующей формулы работы [4] путем умножения на $\left(1 + \frac{2}{3}e_2^2\right)^{-3/2}(1 - e_2^2)^{-3/2}$.

Выражение функции S_2 не приводим ввиду его громоздкости.

В этой статье применялся метод Цейпеля к задаче о пространственном движении спутника планеты, возмущаемого Солнцем с учетом эксцентриситета орбиты последнего. В отличие от случая круговой орбиты Солнца вид преобразованной функции Гамильтона таков, что соответствующие ей дифференциальные уравнения не могут быть решены в квадратурах.

И хотя слагаемые в выражении Ψ_3, зависящие от h'', содержат малый множитель e_2^2, пренебрегать ими, вообще говоря, нельзя, так как при интегрировании дифференциальных уравнений они могут дать огромные возмущения очень долгого периода в элементах орбиты, если разность между средними движениями узла и перицентра орбиты весьма мала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zeipel H. Ark. for Mat., Astr. Och Fys., **11**, H. 1, 1916.
2. Brouver D. Astron. J., **64**, No. 9, 1959.
3. Hori G. A. G., **68**, No. 3, 1963.
4. Орлов А. А. Приближенное аналитическое представление пространственных движений в задаче Хилла. Бюлл. ИТА, **10**, № 5, 1965.
5. Орлов А. А. Лунно-солнечные возмущения в движении искусственных спутников Земли. Труды XV Конгресса МАФ, т. 1. Варшава, 1965.
6. Kovalevsky J. Acad. Sci., **258**, No. 18, 1964.
7. Kovalevsky J. Sur la theorie du mouvement d'une satellite a forte inclinaison et exentricite. IAU, Symposium No. 25, Thessaloniki, 1964. London — N. Y., 1966.
8. Дубошин Г. Н. Небесная механика. М., 1968.

Поступила в редакцию
24.3 1969 г.

ГАИШ