

## ЛИТЕРАТУРА

1. Belov K. P., Nikitin S. A. Phys. Status Solid., 12, n 1, 1965.
2. Pauthenet R. Ann. de Phys., 3, 428, 1958.
3. Belov K. P., Pedko A. V. J. Appl. Phys., 31, Suppl No. 5, 55, 1960; Белов К. П., Педько А. В. ЖЭТФ, 39, 961, 1960; Белов К. Г., Соколов В. И. ЖЭТФ, 48, 979, 1965.
4. Педько А. В. Реферат канд. диссертации. МГУ, 1962, Педько А. В. ЖЭТФ, 41, 700, 1961.
5. Белов К. П. ЖЭТФ, 41, 692, 1961; Белов К. П. «Изв. АН СССР», сер. физич., 25, 1320, 1961.
6. Белов К. П., Белянчикова М. А., Левитин Р. З., Никитин С. А. Редкоземельные ферро- и антиферромагнетики. М., «Наука», 1965.
7. Белов К. П., Талалаева Е. В., Черникова Л. А., Ивановский В. И. Письма в ЖЭТФ, 7, вып. 11, 423, 1968.

Поступила в редакцию  
16.4 1969 г.

Кафедра  
общей физики для биологов

УДК—62—50

Г. А. БЕНДРИКОВ, Б. Б. БУХОВЦЕВ

### МЕТОД ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ С КВАДРАТНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

Исследованию динамических свойств активных линейных систем в зависимости от свободных параметров, линейно входящих в коэффициенты характеристического уравнения, с помощью метода траекторий корней посвящен ряд работ [1, 2, 3]. В настоящей работе рассматриваются корневые годографы характеристических уравнений, при условии, что свободные параметры входят в коэффициенты уравнения как линейно, так и квадратично.

При исследовании динамических свойств систем, находящихся в потоке воздуха, таким свободным параметром может быть скорость потока. В коэффициенты характеристического уравнения двухканальных неидентичных систем автоматического регулирования может входить в качестве свободного параметра коэффициент усиления системы  $k$ . В этом случае в зависимости от вида обратной связи возможно изменение знака свободного параметра.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\Phi_n(\rho) + \rho\Psi_m(\rho) + \rho^2\Theta_l(\rho) = 0, \quad (1)$$

где в качестве параметра траекторий выбран свободный параметр  $\rho$ , изменяющийся в пределах  $-\infty < \rho \leq 0$  или  $0 \leq \rho < +\infty$ .

$$\Phi_n = a_n\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \dots + a_0, \quad \Psi_m = b_m\rho^m + b_{m-1}\rho^{m-1} + \dots + b_0,$$

$$\Theta_l = c_l\rho^l + c_{l-1}\rho^{l-1} + \dots + c_0$$

— полиномы целых положительных степеней  $n, m, l$  соответственно с заданными постоянными коэффициентами  $a_\nu, b_\mu, c_\lambda$ , являющимися параметрами семейств траекторий корней.

Ввиду наличия в уравнении (1) членов с  $\rho^2$  возможность применения геометрического метода траекторий корней в том виде, как указано в работах [1, 2, 3], ограничена.

Однако ряд свойств траекторий корней уравнений с линейным параметром сохраняется и в рассматриваемом случае.

Для получения уравнений траекторий корней и формул параметра траекторий воспользуемся тождествами:

$$\begin{aligned} \Phi_n(\delta + j\omega) &= \Phi_r(\delta, \omega^2) + j\omega\Phi_j(\delta, \omega^2), \\ \Psi_m(\delta + j\omega) &= \Psi_r(\delta, \omega^2) + j\omega\Psi_j(\delta, \omega^2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Theta_l(\delta + j\omega) = \Theta_r(\delta, \omega^2) + j\omega\Theta_j(\delta, \omega^2),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \left[ \Phi_n(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} \Phi_n''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} \Phi_n^{IV}(\delta) - \dots \right], \\ \Phi_j &= \left[ \Phi_n'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} \Phi_n'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} \Phi_n^{V}(\delta) - \dots \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогичный вид имеют выражения для  $\Psi_r, \Psi_j, \Theta_r, \Theta_j$ .

Подставляя (2) в (1) и приравнявая нулю мнимую и действительную части, получим два уравнения:

$$j\omega(\Phi_j + \rho\Psi_j + \rho^2\Theta_j) = 0, \quad (4)$$

$$\Phi_r + \rho\Psi_r + \rho^2\Theta_r = 0 \quad (5)$$

для трех величин:  $\delta, \omega$  и свободного параметра  $\rho$ .

Из (4) и (5) следует, что действительная ось

$$\omega = 0 \quad (6)$$

является траекторией корней, если  $\rho$  — действительный корень уравнения (5) или, учитывая (3), (5) и (6), действительный корень уравнения

$$\Phi_n(\delta) + \rho\Psi_m(\delta) + \rho^2\Theta_l(\delta) = 0. \quad (7)$$

Очевидно, что траекториями корней являются только те части действительной оси, для которых

$$\Psi_m^2(\delta) - 4\Theta_l(\delta)\Phi_n(\delta) \geq 0.$$

Чтобы получить уравнение комплексных ветвей траекторий ( $\omega \neq 0$ ), рассмотрим совокупность уравнений

$$\begin{aligned} \Phi_j + \rho\Psi_j + \rho^2\Theta_j &= 0, \\ \Phi_r + \rho\Psi_r + \rho^2\Theta_r &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Эти уравнения имеют общий корень  $\rho$  в случае равенства нулю результата

$$\begin{vmatrix} \Theta_j & \Psi_j & \Phi_j & 0 \\ 0 & \Theta_j & \Psi_j & \Phi_j \\ \Theta_r & \Psi_r & \Phi_r & 0 \\ 0 & \Theta_r & \Psi_r & \Phi_r \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем уравнение траекторий

$$(\Phi_r\Theta_j - \Phi_j\Theta_r)^2 - (\Phi_r\Psi_j - \Phi_j\Psi_r)(\Psi_r\Theta_j - \Psi_j\Theta_r) = 0. \quad (9)$$

и формулы параметра  $\rho$ , соответствующего каждой точке траекторий

$$\rho = \frac{\Phi_r\Theta_j - \Phi_j\Theta_r}{\Psi_j\Theta_r - \Psi_r\Theta_j} = \frac{\Phi_r\Psi_j - \Phi_j\Psi_r}{\Phi_j\Theta_r - \Phi_r\Theta_j}. \quad (10)$$

В зависимости от знака свободного параметра можно различать два вида корневых годографов — положительный ( $\rho > 0$ ) и отрицательный ( $\rho < 0$ ).

Укажем на некоторые общие свойства траекторий корней. Траектории корней начинаются в  $n$  начальных точках траекторий ( $\rho = 0$ ), определяемых уравнением  $\Phi_n(\rho) = 0$  и заканчиваются в  $l$  предельных точках ( $\rho \rightarrow \pm\infty$ ), определяемых уравнением  $\Theta_l(\rho) = 0$ . Общее число траекторий корней равно удвоенному наибольшему из показателей степеней  $n, m, l$ . Число траекторий корней, начинающихся или заканчивающихся в бесконечности, равно наибольшему из чисел  $2|n-l|$  или  $2|m-l|$ .

Из уравнений (8) следует, что на плоскости комплексных частот  $\rho$  имеются области, соответствующие комплексным значениям  $\rho$ . Эти области удовлетворяют условиям

$$\Psi_j^2 - 4\Theta_j\Phi_j < 0 \text{ и } \Psi_r^2 - 4\Theta_r\Phi_r < 0,$$

и в задачах, приводящих к характеристическому уравнению с действительными коэффициентами, не могут быть реализованы. Через такие области траектории не проходят.

Действительная ось ( $\omega = 0$ ) не обязательно разбивается на части, соответствующие

щие только отрицательному или только положительному корневому годографу. Возможны участки действительной оси, которые одновременно принадлежат обоим корневым годографам.

Из уравнений (3) и (9) следует, что траектории корней расположены симметрично относительно действительной оси.

Выше получены уравнения, по которым траектории корней могут быть построены точно, а также уравнения, по которым вычисляются значения параметра  $\rho$  в любой точке траектории. Однако знание асимптотических свойств всего семейства траекторий очень помогает представить качественную картину корневых годографов. В работах [1, 2, 3] показано, что асимптотические свойства траекторий корней уравнений с линейным свободным параметром следуют прямо из общего вида характеристического уравнения. В случае уравнения с параметром, входящим квадратично, такое рассмотрение затруднительно. Одним из путей определения асимптотических свойств корневых годографов является непосредственное рассмотрение уравнения траекторий (9).

В качестве иллюстрации приведем траектории корней характеристического уравнения, описывающего одно из продольных возмущенных движений самолета. При заданных в работе [4] параметрах самолета это уравнение имеет вид

$$\rho - \rho(1,16\rho^2 + 1,3 \cdot 10^{-2}\rho + 2,38 \cdot 10^{-2}) - \rho^2(2,5 \cdot 10^{-2}\rho^2 + 3,5 \cdot 10^{-4}\rho) = 0. \quad (11)$$

Свободный параметр  $\rho$  здесь представляет собой скорость самолета (в м/сек). Уравнение траекторий по формулам (6), (7) и (9) получается в виде

$$\omega^4 + (2\delta^2 + 2,58\delta + 2,17 \cdot 10^{-2})\omega^2 + (\delta^4 + 2,58\delta^3 + 2,17 \cdot 10^{-2}\delta^2 - 5,3 \cdot 10^{-2}\delta - 3,71 \cdot 10^{-4}) = 0.$$

Формула параметра (10) дает

$$\rho = \frac{2,5 \cdot 10^4(\delta^2 + \omega^2)}{-81(\delta^2 + \omega^2) + 1,19 \cdot 10^3\delta + 8,33}$$

На рис. изображены траектории корней характеристического уравнения (11). Отрицательный корневой годограф ( $\rho < 0$ ), а также те участки ветвей положительного, которые не соответствуют реальному движению данного самолета, изображены пунктиром.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Evans W. R. Control System Dynamics, N. Y.—TL., 1954.
2. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней автоматических линейных систем. М., «Наука», 1964.
3. Удерман Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. М., Госэнергоиздат, 1963.
4. Ведров В. С., Романов Г. С., Сурина В. Н. Самолет, как объект регулирования. Труды МАП, № 74, 1957.

Поступила в редакцию  
17.4 1969 г.

Кафедра  
физики колебаний  
и кафедра  
общей физики  
для мехмата

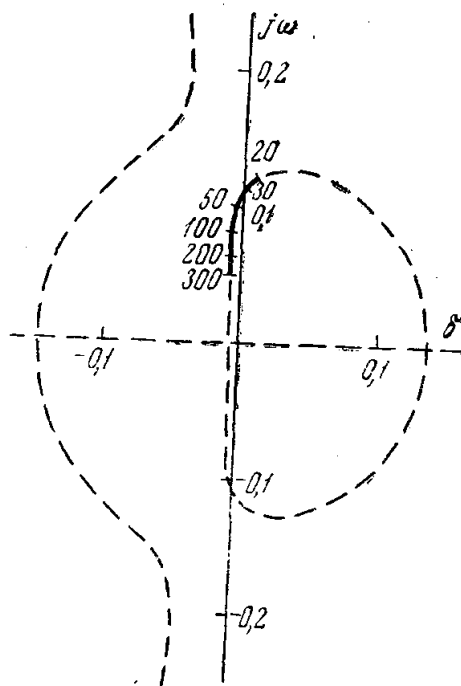


Рис.