Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1970

УДК 551.558.21

В. Н. КОЖЕВНИКОВ, В. В. КОЗОДЁРОВ

К НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ НЕРОВНОСТИ ЗЕМЛИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

Описан новый метод построения решения задачи обтекания произвольного профиля. Исследуется влияние особенностей профиля нижней границы на характер решения двумерной стационарной задачи о подветренных волнах. Получен реальный горный профиль и построено поле функций тока в безразмерном виде. Дается анализ этого конкретного решения.

Двумерная стационарная задача о подветренных волнах в атмосфере весьма часто сводится к решению уравнения Гельмгольца (см., например, [1]). В случае, когда скорость u_0 и градиент температуры γ в натекающем невозмущенном потоке постоянны, сила Кориолиса и сжимаемость не учитываются, а движение частиц предполагается адиабатическим, нелинейная задача для тропосферы сводится к уравнению Гельмгольца для возмущения функции тока $\psi'=\psi+u_0z$ [2, 3]:

$$\nabla^2\psi' + k^2\psi' = 0, \tag{1}$$

$$k^2 = \frac{g(\gamma_a-\gamma)}{u_0^2T_1}, \tag{2}$$

где g — ускорение силы тяжести, γ_a — сухоадиабатический градиент, T_1 — средняя температура тропосферы, x, z — независимые координаты, ∇^2 — оператор Лапласа, ψ — функция тока, определяющая поле скоростей соотношениями:

$$u = \frac{-\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{3}$$

С методами решения (1) и подобных уравнений применительно к подветренным волнам в атмосфере можно ознакомиться в [1]. В данной работе основное внимание будет сосредоточено на исследовании влияния особенностей профиля нижней границы на характер решения (1). Причем мы будем стремиться к тому, чтобы этот профиль по возможности как можно лучше воспроизводил действительный рельеф подстилающей поверхности. Для этой цели целесообразно воспользоваться решением, полученным в [4] для функции $w_1(x, z)$, удовлетворяющей тому же уравнению Гельмгольца (1) и условиям [1]:

$$\lim_{r\to\infty} w_1 = 0 \quad (4) \quad \text{и} \quad w_1(x, 0), \quad (5)$$

где (5) — монотонная функция при $x\to-\infty$.

[1] В [4] в k^2 под T_1 понимается температура однородной атмосферы.

Возмущающее действие неровностей Земли учитывалось наложением условия

$$w_1(x, 0) = u_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x}, \tag{6}$$

где под $\zeta_0(x)$ подразумевался профиль неровности, так что (6) при решении линеаризированной задачи о w_1 представляло линеаризированное условие скольжения. Для произвольного $\zeta_0(x)$ решение для w_1 имело вид

$$w_1 = 2u_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \zeta_0'(\xi) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{4} N_0(kr) + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} J_{2\nu+1}(kr) \frac{\cos(2\nu+1)\varphi}{2\nu+1} \right] d\xi, \tag{7}$$

причем $x=\xi=r\cos\varphi$, $z=r\sin\varphi$, N_0 и $J_{2\nu+1}$ — цилиндрические функции второго и первого рода, r и φ — цилиндрические координаты.

Условие (4), очевидно, полностью соответствует смыслу рассматриваемой задачи о ψ'. В свою очередь (5), согласно [4], равносильно требованию отсутствия волновых возмущений достаточно далеко перед неровностью Земли. Поэтому оба эти условия не противоречат решению (1). Если (как это принято, например, в [1]), возмущающее действие неровностей нижней границы учитывать введением особенностей на линии $z=0$, то, понимая (6) именно в таком смысле, можно воспользоваться (7) непосредственно для функции $\psi'(x, z)$, а также прочими результатами, полученными в [4] для w_1. В частности для

$$\zeta_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ h^* & \text{при } x>0 \ (h^*=\text{const}) \end{cases} \tag{8}$$

построим поле функций тока, опираясь на соотношение

$$\psi_0'(x, z) = u_0 h_0 \left[\frac{1}{4} N_1(kr)\sin\varphi + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu}{(2\nu)^2-1} J_{2\nu}(kr) \sin 2\nu\varphi \right]. \tag{9}$$

Здесь (9) понимается как решение задачи обтекания (1)—(3), удовлетворяющее граничным условиям того же типа, что и (4) и (5), и соответствующее некоторому распределению источников особенностей вдоль $z=0$ при $x \geqslant 0$, интенсивность которых характеризуется величиной h_0.

Характер траекторий, даваемых (9) для нижних слоев атмосферы, представлен на рис. 1. Этот рисунок от подобных расчетов в [4] отличается лишь множителем, стоящим перед квадратной скобкой в (9), который при малых z практически постоянен. Результаты расчетов представлены в безразмерном виде: функции тока в долях $u_0\lambda$, координаты x, z в долях λ, величина $h_0=\lambda$ (как, например, в [3]), $\lambda=2\pi/k$ и определяет длину волны траектории движения любой частицы воздуха в натекающем потоке после смещения ее с исходного равновесного уровня. Особенность решения (9) определяется поведением $N_1(kr)$ в точке $z=0$, $x=0$. Поэтому линия тока, проходящая достаточно высоко над этой точкой, может быть принята за профиль рельефа. В качестве таковой нами была принята линия тока, безразмерная высота которой в натекающем невозмущенном потоке равна $\frac{\pi}{4}$. В силу линейности уравнений и граничных условий обтекание произвольного профиля можно считать суперпозицией решений типа (9), а в безразмерных координатах:

$$\frac{\psi'\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{z}{\lambda}\right)}{u_0\lambda} = \sum_{i=0}^{N} \frac{h_i}{\lambda} \left\{ \frac{1}{4} N_1\left(2\pi \frac{r_i}{\lambda}\right) \sin\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu}{(2\nu)^2 - 1} J_{2\nu}\left(2\pi \frac{r_i}{\lambda}\right) \sin 2\nu\varphi \right\},$$

i	h_i/λ	a_i/λ
0	1	0
1	1	3/2
2	1	1/2
3	1	π
4	5/3	17/10
5	2/3	—5/8
6	4/3	—1/10
7	2/3	—11/10
8	2/3	—3/5
9	1	—13/5
10	1/2	—21/10
11	1/2	2/5
12	1/2	—1/2
13	2/3	—4
14	2/3	—5/2
15	2/3	—7/2
16	2/3	—3

где $r_i = \sqrt{(x + a_i)^2 + z^2}$; $(a_i, 0)$ — координата включения особенностей решения того типа, что определяет (9); h_i — интенсивность особенностей. Ряд (10) подбирается таким образом, чтобы профиль линии тока, имеющей высоту в невозмущенном натекающем потоке $\frac{\pi}{4}$, достаточно хорошо аппроксимировал нужный нам рельеф Земли.

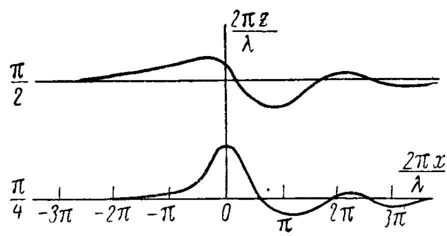

Рис. 1. Линии тока, соответствующие решению (9) при $h_0 = \lambda$

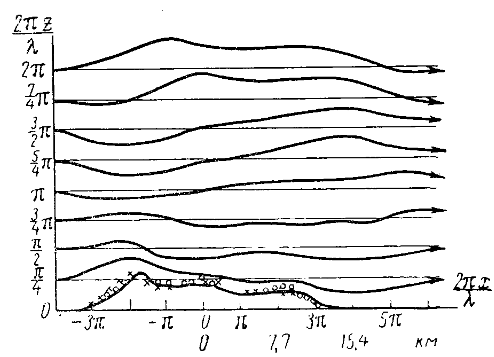

Рис. 2. Картина обтекания горного профиля $\left(\lambda = 2\pi u_0 \sqrt{\frac{T_1}{g(\gamma_a - \gamma)}}\right)$. Тонкими линиями со стрелками обозначены линии тока, жирной — обтекаемый профиль, значками — несколько разрезов реального рельефа Крыма: точками — по направлению от Алупки до Нижнего Керменчика, крестиками—от Ялты до Юхары, нуликами — от Ялты до Улу-Сала

Конкретное решение было построено для профиля, представленного на рис. 2. Он хорошо воспроизводит характер рельефа прибрежного и горного Крыма в районе к северу от Ялты в случае, когда $\lambda=7{,}7$ *км*. Поле линий тока в этом случае моделирует процесс обтекания воздушным потоком, двигающимся с юго-востока перпендикулярно к горному хребту. Соответствующие для этого случая значения приведены в таблице ($N=16$).

Процедура подбора h_i и a_i несложна. Аналогичным путем нетрудно добавлять к данному профилю отдельные дополнительные зубцы с тем, чтобы изучать их влияние на характер возмущений. Последнее предопределяет в основном использование результатов [4] в форме (10) для обтекания.

Результаты расчета, представленные на рис. 2, имеют и самостоятельный практический интерес. Следует обратить внимание на сгущение линий тока над главным хребтом $\left(z\approx\frac{\lambda}{4},\ x\approx\frac{3\lambda}{4}\right)$. Скорости ветра здесь, по-видимому, могут возрастать в несколько раз по сравнению с ветром перед горой. Над серединой искривления рельефа волновые движения в облачности будут проявляться только на больших высотах (около 5 *км* над уровнем моря и выше), в то же время за искривлением, т. е. при $x>15$ *км*, облака могут возникать и на меньших высотах. Данные расчеты относятся к $\lambda=7{,}7$ *км*, для других значений λ величины h_i и a_i для данного профиля горы будут другими. Поэтому в дальнейшем намечено провести серию расчетов для разных λ с тем, чтобы выяснить влияние на возмущения отдельных вершин реального рельефа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожевников В. Н. Обзор современного состояния мезомасштабных орографических неоднородностей поля вертикальных токов. «Труды ЦАО», 1969, вып. 98.
2. Pillow A. F. Aero. Res. Lab. Melbourn, **A**, 79, 1952.
3. Кожевников В. Н. «Изв. АН СССР», физика атмосферы и океана, 4, № 1, 1968.
4. Lyra G. Z. angev. Math. und Mech., **23**, 1, 1943.

Поступила в редакцию
2.2 1969 г.

Кафедра
физики атмосферы