Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 1 — 1970

УДК

Л. И. МИРКИН, Р. Л. СТРАТОНОВИЧ

СРАВНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО МЕТОДОВ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ МАРКОВСКОГО СИГНАЛА

Сравниваются линейные и нелинейные методы фильтрации. Методом условных марковских процессов находятся алгоритмы нелинейной интерполяции и экстраполяции двоичного марковского сигнала. Полученные результаты сравниваются с аналогичными для линейных фильтров.

В [1] для случая аддитивной смеси бинарного марковского сигнала с белым шумом были найдены различными способами оптимальные линейные системы для интерполяции и экстраполяции сигнала. В данной работе эта же задача решается методом нелинейной фильтрации, развитая в [2] на основе теории условных марковских процессов, и полученные результаты сравниваются. В обоих случаях использован критерий минимума среднеквадратичной ошибки фильтрации. Сравнение, проведенное в [2] для случая чистой фильтрации, показало много большую эффективность нелинейной фильтрации при малом уровне помех, а именно $\varepsilon^2_{\text{нел}}/\varepsilon^2_{\text{лин}} \to 0$ при $\mu N \to 0$.

§ 1. Синтез нелинейного фильтра методом условных марковских процессов

Искомая оценка сигнала $\eta(\sigma)$ при среднеквадратичном критерии качества фильтрации

$$\eta_0(\sigma, T) = M\{\eta(\sigma) \mid y_{t_0}^T\} \tag{1}$$

полностью определяется набором апостериорных вероятностей $P\{\eta(\sigma) = \pm 1 \mid y_{t_0}^T\}$ состояний сигнала. Этот набор вероятностей, определенный на процессе $\eta(\sigma)$, характеризует условный процесс, порожденный наблюдением $y_{t_0}^T$ функции $y(t)$, который при нашем выборе наблюдаемого процесса (см. [1]) будет согласно теореме 5.1 работы [2] марковским. Эволюция вероятностей этого условного марковского процесса полностью определена его апостериорным оператором $A(\sigma)$ с помощью апостериорных мер: финальной $W_\sigma(d\eta_\sigma)$ и вторичной $\widetilde{V}_\sigma^T(\eta_\sigma, \Omega)$. При этом для случая с запаздыванием (интерполяции) имеем:

$$P\{d\eta_\sigma \mid y_{t_0}^T\} = W_\sigma(d\eta_\sigma)\widetilde{V}_\sigma^T(\eta_\sigma, \Omega), \tag{2}$$

а для случая прогнозирования ($\sigma > T$)

$$\frac{d}{du} P\{d\eta_u \mid y_{t_0}^T\} = [P(\cdot \mid I_{t_0}^T) A_{pr}](d\eta_u), \tag{3}$$

где ($T \leqslant u \leqslant \sigma$). Начальные условия определяются равенством

$$P\{d\eta_T \mid y_{t_0}^T\} = W_T(d\eta_T). \tag{4}$$

Теория условных марковских процессов [2] дает для апостериорных мер $W_\sigma(d\eta_\sigma)$ и $\widetilde{V}_\sigma^T(\eta_\sigma, \Omega)$ следующие уравнения:

$$\frac{d}{d\sigma} W_\sigma(d\eta_\sigma) = [W_\sigma A(\sigma)](d\eta_\sigma) - W_\sigma(d\eta_\sigma)[W_\sigma A(\sigma)](\Omega), \tag{5}$$

$$-\frac{d}{d\sigma} \widetilde{V}_\sigma^T(\eta_\sigma, \Omega) = [A(\sigma)\widetilde{V}_\sigma^T](\eta_\sigma, \Omega) - [W_\sigma A(\sigma)](\Omega)\widetilde{V}_\sigma^T(\eta_\sigma, \Omega). \tag{6}$$

Так как в условиях данной задачи (см. [1]) оператор априорного процесса $A_{pr\alpha\beta}(t) = p_{\alpha\beta}$, где

$$\| p_{\alpha\beta} \| = \begin{Vmatrix} -\mu & \mu \\ \nu & -\nu \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

то апостериорный оператор $A(\sigma)$ согласно [2] будет

$$A_{\alpha\beta}(\sigma) = p_{\alpha\beta} + \frac{1}{N}\left\{a(\alpha)\left[y(\sigma) - \frac{1}{2}a(\alpha)\right]\right\}\delta_{\alpha\beta}, \tag{8}$$

здесь $a(\alpha)$ — параметры сноса ($a(1) = 1$, $a(2) = -1$).

Используя явный вид оператора $A(\sigma)$ (8), перепишем уравнения (5—6):

$$\dot{w}_1(\sigma) = -\dot{w}_2(\sigma) = (-\mu w_1 + \nu w_2) + \frac{2}{N} w_1 w_2 y(\sigma), \tag{9}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{d\sigma}\widetilde{V}_\sigma^T(1) = -\mu[\widetilde{V}(1) - \widetilde{V}(2)] + \dfrac{2}{N}\widetilde{V}(1)\widetilde{w}_2(\sigma)\, y(\sigma), \\ -\dfrac{d}{d\sigma}\widetilde{V}_\sigma^T(2) = \nu[\widetilde{V}(1) - \widetilde{V}(2)] - \dfrac{2}{N}\widetilde{V}(2)\, w_1(\sigma)\, y(\sigma), \end{cases} \tag{10}$$

где $w_{1,2}(\sigma) = w_\sigma[\eta(\sigma) = \pm 1]$ и $\widetilde{V}_\sigma^T(1, 2) = \widetilde{V}_\sigma^T(\eta\sigma = \pm 1, \Omega)$.

Уравнение прогноза будет иметь вид аналогичный априорным уравнениям [1]:

$$\dot{p}_1(\sigma) = -\dot{P}_2(\sigma) = -\mu P_1 + \nu P_2, \tag{11}$$

где

$$p_1 = P\{\eta(\sigma) = 1 \mid y_{t_0}^T\}, \quad p_2 = P\{\eta(\sigma) = -1 \mid y_{t_0}^T\}.$$

Системы уравнений (9—11) допускают более простую запись, если перейти к переменным $z(\sigma) = w_1(\sigma) - w_2(\sigma)$ и

$$x(T, \sigma) = P\{\eta(\sigma) = 1 \mid y_{t_0}^T\} - P\{\eta(\sigma) = -1 \mid y_{t_0}^T\}, \tag{12}$$

при этом

$$w_{1,2}(\sigma) = \frac{1 \pm z(\sigma)}{2}; \quad x(\sigma, T) = \frac{1}{2}[\widetilde{V}(1) - \widetilde{V}(2)] + \frac{z}{2}[\widetilde{V}(1) + \widetilde{V}(2)]. \tag{13}$$

Вместо уравнений (9—11) получим при $\sigma < T$ два уравнения

$$\dot{z}(\sigma) = [\beta - \alpha z(\sigma)] + \frac{1}{N}(1 - z^2(\sigma))\, y(\sigma), \tag{14}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = [\beta - \alpha z(\sigma)] \frac{1 - 2xz + z^2}{1 - z^2} + \alpha(x - z), \tag{15}$$
$$(\alpha = \mu + \nu,\ \beta = \nu - \mu),$$

а при $\sigma > T$ уравнение

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \beta - \alpha x \tag{16}$$

с начальными условиями $z(t_0) = z_0$, $x(T, T) = z(T)$.

Уравнения (14 — 16) полностью описывают процедуру фильтрации сигнала $\eta(\sigma)$ по наблюдению $y_{t_0}^T$. Получающаяся оценка $\eta_0(T, \sigma)$ будет согласно (12) и (1) определяться выражением

$$\eta_0(T, \sigma) = x(T, \sigma). \tag{17}$$

§ 2. Качество работы нелинейного фильтра

Исследуем качество нелинейной экстраполяции и интерполяции с помощью выбранного ранее критерия минимума среднеквадратической ошибки фильтрации. Выражение для среднеквадратической ошибки

$$\overline{\varepsilon^2}(\sigma, T) = M\{[\eta(\sigma) - \eta_0(\sigma, T)]^2\} = MM\{[\eta(\sigma) - \eta_0(\sigma, T)]^2 \mid y_{t_0}^T\} =$$
$$= M\{M[\eta^2(\sigma) \mid y_{t_0}^T] + M[\eta_0^2(T, \sigma) \mid y_{t_0}^T] - 2M[\eta(\sigma)\eta_0(T, \sigma) \mid y_{t_0}^T]\}$$

при учете (1) и (17) значительно упростится:

$$\overline{\varepsilon^2}(\sigma, T) = M\{1 + x^2(\sigma, T) - 2x^2(\sigma, T)\} = M(1 - x^2(\sigma, T)) =$$
$$= \iint_{-1}^{1} (1 - x^2)\, p(x, z, \sigma, T)\, dx dz, \tag{18}$$

или

$$\overline{\varepsilon^2}(\sigma, T) = 1 - m_{20}(\sigma, T) = 1 - \int_{-1}^{1} m_2(z)\, dz,$$

где

$$m_{kn}(\sigma, T) = \iint_{-1}^{1} x^k z^n p(x, z, \sigma, T)\, dx dz, \quad m_k(z, T) = \int_{-1}^{1} x^k p(x, z, \sigma, T)\, dx. \tag{19}$$

При этом в случае прогноза мы находим из уравнения (16)

$$x(\tau) = z(T)\, e^{\alpha\tau} + \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{\alpha\tau}), \tag{20}$$

где $\tau = T - \sigma < 0$.

Используя выражение (20) для вычисления среднеквадратической ошибки фильтрации по формуле (18), получаем

$$\overline{\varepsilon^2}(\sigma, T) = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 (1 - e^{\alpha\tau})^2 - 2\frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha\tau}(1 - e^{\alpha\tau})\, m_{01}(T) - e^{2\alpha\tau} m_{02}(T). \tag{21}$$

В случае интерполяции эволюция $x(T, \sigma)$ и $z(\sigma)$ задается системой связанных стохастических уравнений (14—15). Поэтому для вычисления $\overline{\varepsilon^2}(\sigma, T)$ необходимо в выражении (18) использовать $p(x, z, \sigma, T)$. Для нахождения $p(x, z, \sigma, T)$ мы воспользуемся марковостью условного процесса фильтрации. Условные вероятности процесса подчиняются

уравнению Фоккера — Планка, для задания конкретного вида которого необходимо лишь найти параметры сноса и локальные дисперсии апостериорных процессов $x(\sigma, T)$ и $z(\sigma)$.

При нахождении этих параметров будем следовать методике, предложенной в работе [2]. А именно, рассматривая процесс $\{x(T, \sigma), z(\sigma)\}$ как результат стохастического преобразования наблюдаемого процесса $y(t)$, мы с помощью теоремы 2.3 работы [2], используя коэффициенты сноса и локальной дисперсии процесса $y(t)$

$$a_y(t) = \lim_{h \searrow 0} M\left\{\frac{1}{h}[y(t+h) - y(t)] \mid y_{t_0}^T\right\} = \lim_{h \searrow 0} M\left\{\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \eta(\tau)\, d\tau \mid y_{t_0}^T\right\} =$$

$$= M\{\eta(t) \mid y_{t_0}^T\} = x(t, T).$$

$$b_{yy} = \lim_{h \searrow 0} M\left\{\frac{1}{h}[y(t+h) - y(t)]^2 \mid y_{t_0}^T\right\} = \lim_{h \searrow 0} M\left\{\frac{1}{h}\Delta\zeta^2\right\} = N, \quad (22)$$

получим искомые коэффициенты сноса и локальной дисперсии процесса $\{x(T, \sigma), z(\sigma)\}$:

$$\begin{cases} a_x = (\beta - \alpha z)\dfrac{1 - 2xz + z^2}{1 - z^2} + \alpha(x - z), \\ a_z = (\beta - \alpha z) + \theta(x - z)(1 - z^2), \\ b_{zz} = \theta(1 - z^2)^2, \ b_{xx} = b_{zx} = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где $\theta = \dfrac{1}{N}$.

Найденные коэффициенты определяют конкретный вид уравнения Фоккера—Планка в случае интерполяции

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma}(x, z, \sigma, T) = \frac{\theta}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\{(1 - z^2)p\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[(\beta - \alpha z)\frac{1 - 2xz + z^2}{1 - z^2} + \alpha(x - z)\right]p\right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z}\{[\beta - \alpha z) + \theta(x - z)(1 - z^2)]p\}. \quad (24)$$

Его можно получить и из общего вида инфинитезимального оператора условного процесса фильтрации (см. [3], стр. 163).

Прямое вычисление $p(x, z, \sigma, T)$ и, следовательно, $\overline{\varepsilon^2}(\sigma, T)$ из уравнения (24) затруднительно, вследствие зависимости от x последнего члена в уравнении (24). Поэтому для исследования поведения среднеквадратичной ошибки фильтрации $\overline{\varepsilon^2}(\sigma, T)$ вблизи точки $\sigma = T$ воспользуемся разложением $\overline{\varepsilon^2}(\sigma, T)$ в ряд Маклорена, считая ее дифференцируемой функцией от аргумента $\tau = T - \sigma > 0$:

$$\overline{\varepsilon^2}(\tau) = \overline{\varepsilon^2}(0) + \frac{\tau}{1!}\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{d\tau}(0) + \frac{\tau^2}{2!}\frac{d^2\overline{\varepsilon^2}}{d\tau^2}(0) + \ldots + \frac{\tau^n}{n!}\frac{d^n\overline{\varepsilon^2}}{d\tau^n}(0) + \ldots. \quad (25)$$

В точке $\sigma = T$ справедливо равенство $x(T, T) = z(T)$ и распределение вероятностей состояний принимает вид

$$p(x, z, T, T) = p(z, T)\,\delta(x - z). \quad (26)$$

Запишем первый член ряда (25):

$$\overline{\varepsilon^2}(0) = \iint_{-1}^{1} (1 - x^2)\, p(z, T)\, \delta(x - z)\, dxdz = 1 - m_{02}(T). \qquad (27)$$

Будем исследовать зависимость ошибки фильтрации от σ, фиксируя длительность наблюдения T. Тогда общая формула для коэффициентов ряда (25) в силу (18) будет

$$\frac{d^n\overline{\varepsilon^2}}{d\tau^n}(0) = -\iint_{-1}^{1} x^2 \frac{\partial^n p}{\partial\tau^n}(x, z, \tau)\, dxdz =$$

$$= (-1)^{n+1} \iint_{-1}^{1} x^2 \frac{\partial^n p}{\partial\sigma^n}(x, z, \sigma, T)\, dxdz \quad (n \geqslant 1) \qquad (28)$$

При вычислении $\frac{d^n\overline{\varepsilon^2}}{d\tau^n}(0)$ образуем с помощью уравнения (24) $\frac{\partial^n p}{\partial\sigma^n}(x, z, \sigma, T)$ и, подставляя ее в формулу (28), проводим необходимое число раз интегрирование по частям. На заключительном этапе, полагая $\sigma = T$ и используя равенство (26), получаем окончательный результат:

$$\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{d\tau}(0) = 2\beta m_{01}(T) - 2\alpha m_{02}(T),$$

$$\frac{d^2\overline{\varepsilon^2}}{d\tau^2}(0) = -2\beta^2 + 2\beta(3\alpha - 2\theta)\, m_{01}(T) + 4\alpha(2\theta - \alpha)\, m_{02}(T) - 4\theta\beta m_{03}(T),$$

$$\frac{d^3\overline{\varepsilon^2}}{dT^3}(0) = [2\theta(4\alpha^2 + 6\beta^2) - 6\alpha\beta^2] + 2m_{01}(T)[4\theta^2\beta - 33\theta\alpha\beta + 7\alpha^2\beta] + \qquad (29)$$

$$+ 2m_{02}(T)[(17\alpha^2 + 19\beta^2)\theta - 12\theta^2\alpha - 4\alpha^3] +$$

$$+ 2m_{03}(T)[8\theta^2\beta - 13\theta\alpha\beta] - 8\theta^2\alpha m_{04}(T).$$

Получение коэффициентов разложения (25), соответствующих $n > 3$, связано со значительными трудностями, поэтому ограничимся рассмотрением первых четырех членов ряда (25).

Вычисление моментов $m_{0k}(T)$, входящих в выражения (29), можно производить в силу (19) с помощью одномерной плотности вероятности $p(z, T)$, уравнение для которой приведено в монографии [2]:

$$\frac{\partial p}{\partial T}(z, T) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{\theta}{2}(1 - z^2)^2 p(z, T)\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\{(\beta - \alpha z)\, p(z, T)\}. \qquad (30)$$

Будем рассматривать случай, когда процесс фильтрации установился и $\frac{\partial p}{\partial T} = 0$. Умножением на z^x и интегрированием получаем уравнения

$$m_{01} = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$\theta m_{04} = 2(\alpha + \theta)\, m_{02} - 2\beta m_{01} - \theta,$$

$$3\theta m_{05} = 3(\alpha + 2\theta)\, m_{03} - 3\beta m_{02} - 3\theta m_{01}, \qquad (31)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_{0k+2} = \frac{2[\alpha + (k-1)\theta]}{(k-1)\theta} m_{0k} - \frac{2\beta}{(k-1)\theta} m_{0k-1} - m_{0k-2}.$$

С помощью уравнений (31) упростим вид выражений (29), кроме того, введем параметры $S=\frac{2\theta}{\alpha}=\frac{2}{\alpha N}$ и $\delta=\frac{\beta}{\alpha}$, учитывающие влияние уровня помехи и асимметрии сигнала на качество фильтрации:

$$\overline{\varepsilon^2}(0)=1-m_{02},$$

$$\frac{d\overline{\varepsilon^2}}{d\tau}(0)=2\beta m_{01}-2\alpha m_{02}=\alpha\{2\delta m_{01}-2m_{02}\},$$

$$\frac{d^2\overline{\varepsilon^2}}{d\tau^2}(0)=\alpha^2\{-2\delta^2+2\delta(3-S)m_{01}+4(S-1)m_{02}-2\delta S m_{03}\}, \quad (32)$$

$$\frac{d^3\overline{\varepsilon^2}}{d\tau^3}(0)=\alpha^3\{[2S^2+S(4+6\delta^2)-6\delta^2]+m_{01}\delta[2S^2-17S+14]+$$

$$+m_{02}[(1+19\delta^2)S-10s^2-8]+m_{03}\delta[4s^2-13S]\}.$$

В симметричном случае ($\delta=0$) формулы (32) значительно упрощаются.

Для вычисления стационарных значений первых моментов, входящих в (32), воспользуемся стационарным решением уравнения (30) (см. [2]):

$$p_{\text{ст}}(z)=\text{const}\,\frac{1}{1-z^2}\exp\left\{\frac{1}{\theta}\left[\beta\,\text{arth}z+\frac{\beta z-\alpha}{1-z^2}\right]\right\}.$$

В этом случае:

$$m_{0k}=\int_{-1}^{1}z^k p_{\text{ст}}(z)\,dz=\text{const}\int_{\infty}^{\infty}\frac{\text{sh}^k\varphi}{(\text{ch}\,\varphi+1)^{k-1}}\exp\left\{\frac{1}{2\theta}[\beta(\text{sh}\,\varphi+\varphi)-\alpha\,\text{ch}\,\varphi\right\}d\varphi.$$

Так что получаем:

$$m_{01}=\frac{\beta}{\alpha};\quad m_{02}=\frac{K_{q+1}(N\sqrt{\gamma})-\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}K_q(N\sqrt{\gamma})}{K_{q+1}(N\sqrt{\gamma})+\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}K_q(N\sqrt{\gamma})};$$

$$q=-\frac{\beta}{2\theta}=-\frac{N}{2}(\nu-\mu);\quad \gamma=\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}=\mu\nu. \quad (33)$$

Выразить в элементарных или затабулированных функциях значение m_{03} не удается — его нужно находить численным интегрированием.

Таким образом, для исследования поведения среднего квадрата ошибки нелинейной интерполяции при малых временах запаздывания получены в стационарном случае выражения для четырех первых коэффициентов ее разложения в ряд Маклорена (25).

§ 3. Сравнение качества линейного и нелинейного методов фильтрации

Опираясь на полученные выше результаты, можно сравнить качество линейных и нелинейных алгоритмов, осуществляющих оптимальную по среднеквадратическому критерию интерполяцию или экстраполяцию рассматриваемого нами марковского сигнала. Как уже отмечалось в [1], линейный алгоритм, найденный с помощью условных марковских процессов, совпадает для бесконечного или полубесконечного интервала

наблюдения с результатом, полученным обычными методами линейной фильтрации. Полученную в работе [1] оценку качества стационарной линейной фильтрации сравним с оценкой нелинейной фильтрации в случаях интерполяции и экстраполяции. Сравнение для случая чистой фильтрации изложено в § 9.6 [2].

Ограничимся рассмотрением симметричного случая ($\beta=0$, $\mu=\nu$), что принесет нам значительное упрощение промежуточных выкладок. При необходимости полученные результаты позволяют провести также сравнение и для несимметричного случая.

Рассмотрим при указанном ограничении прогнозирующий фильтр. Для этого преобразуем выражение среднеквадратичной ошибки нелинейной экстраполяции (21) с учетом формул (33)

$$\bar{\varepsilon}^2_{\text{нел}}(\tau) = 1 - e^{2\alpha\tau}\frac{K_1\left(\frac{1}{S}\right) - K_0\left(\frac{1}{S}\right)}{K_1\left(\frac{1}{S}\right) + K_0\left(\frac{1}{S}\right)}, \quad (\tau < 0) \tag{34}$$

и сравним (34) с выражением для среднеквадратичной ошибки линейной экстраполяции из [1].

$$\bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(\tau) = 1 - e^{2\alpha\tau}\frac{\Delta - 1}{\Delta + 1}, \quad (\tau < 0,\ \Delta = \sqrt{1+S}).$$

Сравнение удобно производить, рассматривая разности ошибок линейного, нелинейного и прогнозирующего фильтра, работающего в отсутствие помех

$$\bar{\varepsilon}^2_0(\tau) = \lim_{S\to\infty} \bar{\varepsilon}^2_{\text{нел}}(\tau) = \lim_{S\to\infty} \bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(\tau) = 1 - e^{2\alpha\tau}.$$

Построим отношение разностей ошибок

$$\frac{\bar{\varepsilon}^2_0(\tau) - \bar{\varepsilon}^2_{\text{нел}}(\tau)}{\bar{\varepsilon}^2_0(\tau) - \bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(\tau)} = \frac{1 - \dfrac{K_1\left(\frac{1}{S}\right) - K_0\left(\frac{1}{S}\right)}{K_1\left(\frac{1}{S}\right) + K_0\left(\frac{1}{S}\right)}}{1 - \dfrac{\sqrt{1+S} - 1}{\sqrt{1+S} + 1}} = \frac{\bar{\varepsilon}^2_{\text{нел}}(0)}{\bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(0)}.$$

Таким образом, задача сравнения линейного и нелинейного прогноза свелась к задаче сравнения линейного и нелинейного методов чистой фильтрации, решенной в [2]. Откуда

$$\frac{\bar{\varepsilon}^2_0(\tau) - \bar{\varepsilon}^2_{\text{нел}}(\tau)}{\bar{\varepsilon}^2_0(\tau) - \bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(\tau)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{S}}\right) \text{ при } S \gg 1,$$

т. е. при малых помехах эффективность нелинейного прогноза много выше линейного.

При сравнении качества интерполяции ограничимся областью малых времен запаздывания. В этом случае будем использовать приближенное выражение (25) среднего квадрата ошибки нелинейной интерполяции с коэффициентами (32). Для удобства сравнения разложим в ряд Маклорена также и выражение для среднеквадратической ошибки линейной интерполяции [1]:

$$\bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(\tau) = \bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(0) + \frac{d\bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}}{d\tau}\cdot\frac{\tau}{1!} + \ldots + \frac{\tau^n}{n!}\frac{d^n\bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}}{d\tau^n} + \ldots \tag{35}$$

с коэффициентами:

$$\bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(0) = \frac{2}{\Delta+1}, \quad \frac{d\bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}}{d\tau}(0) = -2\alpha\frac{\Delta-1}{\Delta+1},$$

$$\frac{d^2\varepsilon^2_{\text{лин}}}{d\tau^2}(0) = 4\alpha^2\Delta\frac{\Delta-1}{\Delta+1}, \quad \frac{d^3\bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}}{d\tau^3}(0) = -8\alpha^3\Delta^2\frac{\Delta-1}{\Delta+1},$$

$$\Delta = \sqrt{1+S}. \tag{36}$$

Графики точного [1] выражения среднеквадратичной ошибки линейной интерполяции, ее приближения рядом (35) и аналогичного приближения оценки качества нелинейной интерполяции приведены на рис. 1 и 2.

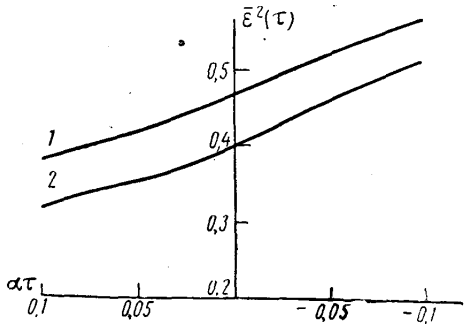

Рис. 1. Среднеквадратичная ошибка линейной и нелинейной фильтрации в случае $\beta=0$, $S=\frac{2\theta}{\alpha}=10$. *1* — линейная фильтрация, *2* — нелинейная фильтрация

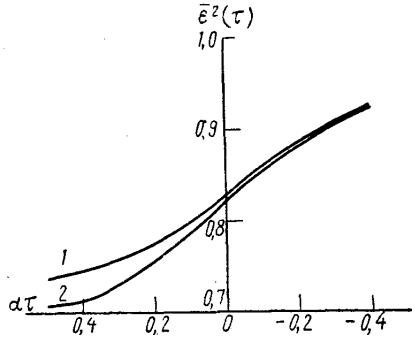

Рис. 2. Среднеквадратичная ошибка фильтрации в случае $\beta=0$, $S=\frac{2\theta}{\alpha}=1$. *1* — линейная фильтрация, *2* — нелинейная фильтрация

Переходя от частных значений к общему случаю, разобьем задачу сравнения на две части.

В первой части сравним качество линейной и нелинейной интерполяции при «слабом» шуме ($\alpha N \ll 1$, $S \gg 1$). При этом воспользуемся формулами

$$K_0\left(\frac{1}{S}\right) \simeq \ln\frac{2}{\gamma}S, \quad K_1\left(\frac{1}{S}\right) \simeq S, \quad \gamma = 1{,}781\ldots$$

Из формул (33) получаем выражения для приближенных оценок линейной (35) и нелинейной (25) интерполяции:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(\tau) &= 2\left\{\frac{1}{\sqrt{S}} - (\alpha\tau) + \sqrt{S}(\alpha\tau)^2 - \frac{2}{3}S(\alpha\tau)^3 + O(S^{\frac{3}{2}}\alpha^4\tau^4)\right\}, \\ \bar{\varepsilon}^2_{\text{нел}}(\tau) &= 2\left\{\frac{1}{S}\ln\frac{2}{\gamma}S - (\alpha\tau) + S(\alpha\tau)^2 - \frac{13}{6}S^2(\alpha\tau)^3 + O(S^3\alpha^4\tau^4)\right\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Из (37) следует, что учет четырех первых членов ряда справедлив для линейного фильтра в интервале

$$0 \leqslant \alpha\tau < \frac{1}{\sqrt{S}} \tag{38}$$

и для нелинейного фильтра при $0 \leqslant \alpha\tau < \frac{1}{S}$. Рис. 1 подтверждает такой вывод. Рассматривая меньший интервал (38), получим при $S \gg 1$:

$$\bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(\tau) - \bar{\varepsilon}^2_{\text{нел}}(\tau) \geqslant 2\left\{\frac{1}{\sqrt{S}} - O\left(\frac{1}{S}\right)\right\}. \tag{39}$$

Перейдем к случаю «сильного» шума ($\alpha N \gg 1$, $S \ll 1$). Пользуясь асимптотическими выражениями для функций Макдональда $K_0\left(\frac{1}{S}\right)$ и $K_1\left(\frac{1}{S}\right)$ (см. [5]), получаем

$$\bar{\varepsilon}^2_{\text{лин}}(\tau) - \bar{\varepsilon}^2_{\text{нел}}(\tau) = \frac{1}{4} S\left\{(1+2\alpha\tau)\left(\frac{1}{4}S - \frac{83}{128}S^2 + \frac{609}{1024}S^3 - 0(S^4)\right) + \right.$$
$$+ 4(\alpha\tau)^2\left(1 - \frac{1}{2}S - \frac{241}{768}S^2 + \frac{3355}{6144}S^3 - 0(S^4)\right) +$$
$$\left. + \frac{8}{3}(\alpha\tau)^3\left(1 - \frac{1}{16}S + \frac{127}{256}S^2 + \frac{43}{512}S^3 + 0(S^3)\right)\right\}. \tag{40}$$

Размер временного интервала, в котором справедливы оценки (40), определяется из тех же соображений, что и в случае «слабого» шума.

Полученные результаты (39) и (41) показывают, что в области малых времен запаздывания качество оптимальной нелинейной интерполяции всегда выше качества линейной интерполяции и намного быстрее убывает при увеличении времени запаздывания. Этот вывод подтверждается и графиками рисунков 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миркин Л. И., Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 6, 1968.
2. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во МГУ, 1966.
3. Стратонович Р. Л. Conditional Markov Process and Their Application to the Theory of Optimal Control. Amerikan Elsevir Publishing Company, INC, N. Y., 1968.
4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
5. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
26.2 1969 г.

Кафедра
общей физики для мехмата