

Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 1 — 1970

УДК 530.12 : 531.51

В. А. БАРЫНИН

СИЛЫ ИНЕРЦИИ В ТРЕХМЕРНОМ ХРОНОМЕТРИЧЕСКИ-ИНВАРИАНТНОМ ДВУХМЕТРИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ

В рамках трехмерного хронометрически-инвариантного двухметрического формализма из компонентов метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ построен трехмерный хронометрически-инвариантный векторный потенциал сил инерции. Для недеформируемых систем отсчета, допускающих синхронизацию часов во всем пространстве, сформулировано понятие инерциальной системы отсчета и получено выражение для силы инерции через ее потенциал.

Инерция, как известно, описывается аппаратом общей теории относительности. Это проявляется в том, что символы Кристоффеля не являются тензорами относительно общих преобразований 4-координат

$$x'^{\alpha} = x'^{\alpha}(x^{\beta}) \quad (1)$$

(греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — 1, 2, 3).

Однако аппарат классической общей теории относительности не позволяет получить для силы инерции выражение, являющееся вектором по отношению к тем преобразованиям 4-координат, которые не имеют отношения к изменению движения системы отсчета.

Использование двухметрического формализма [1, 2], оперирующего только тензорными относительно преобразований (1) величинами, также ничего не дает, так как в этом формализме все эффекты инерции автоматически исключаются.

Силе инерции можно придать необходимые векторные свойства в рамках трехмерного хронометрически-инвариантного (х. и.) двухметрического формализма [3], оперирующего х. и. тензорами относительно чисто пространственных преобразований координат.

Потенциал сил инерции

В трехмерном х. и. двухметрическом формализме роль трехмерных потенциалов гравитационного поля могут играть величины g_{00} , g_{0k} и g_{ik} , являющиеся соответственно х. и. скаляром, вектором и тензором относительно чисто пространственных преобразований координат.

Удобнее, однако, пользоваться другим набором х. и. потенциалов, связанных с указанными следующим образом:

$$g_{ik}^* = -\gamma_{ik}, \quad g_{0k}^* = \gamma_{ik}V^i, \quad g_{00}^* = \psi - \gamma_{ik}V_{ik}^*V^k. \quad (2)$$

Рассмотрим их трансформационные свойства по отношению к общим преобразованиям 4-координат (1). Нетрудно проверить, что имеют место соотношения:

$$\psi' = \psi, \quad V'^i = \frac{\partial^* x'^i}{\partial x^n} V^m + \frac{\partial^* x'^i}{\partial t}, \quad \gamma'_{ik} = \frac{\partial^* x^e}{\partial x'^i} \frac{\partial^* x^m}{\partial x'^k} \gamma_{em}, \quad (3)$$

из которых следует, что ψ и γ_{ik} являются соответственно х. и. скаляром и тензором, не зависящими от движения системы отсчета.

Все явления инерции, таким образом, описываются лишь векторным потенциалом гравитационного поля V^i , преобразующимся при переходе к движущейся относительно исходной системе отсчета, как это следует из (3), по закону:

$$V'^i = \frac{\partial^* x'^i}{\partial x^m} (V^m - v_0^m), \quad (4)$$

где

$$v_0^m = - \frac{\partial^* x^m}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial^* x'^k}{\partial t} \quad (5)$$

имеет смысл компонент локальной х. и. скорости новой системы отсчета относительно старой в старой системе координат.

Силы инерции

Выразим силы инерции через вектор-потенциал гравитационного поля. Для этого рассмотрим движение частицы в гравитационном поле в некоторой системе отсчета, пространственная и временная метрики которой удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial^* \epsilon_{ik}}{\partial t} = 0; \quad S_{\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (6)$$

где $S_{\mu\nu}^\lambda$ определяется формулой (13в) работы [3]. Условие (6) означает, что выбранная система отсчета не деформируется и допускает однозначную синхронизацию часов во всем пространстве.

В этом случае трехмерное уравнение движения частицы в гравитационном поле ((27) в [3]) можно записать в виде (поднятие и опускание индексов производится здесь и далее с помощью метрики ϵ_{ik}):

$$\frac{D}{dT} (M v_e) = F_e, \quad (7)$$

где через $\frac{D}{dT}$ обозначена операция х. и. ковариантного дифференцирования в смысле метрики ϵ_{ik} , а F_e и M соответственно ковариантная составляющая силы, действующей на частицу в гравитационном поле, и ее масса в гравитационном поле, определяемая выражением

$$M = \frac{m}{\beta}, \quad (8)$$

где β , выраженная через новые х. и. потенциалы гравитационного поля и х. и. скорость частицы, имеет вид

$$\beta = \sqrt{\psi - \gamma_{ik} (v^i - V^i) (v^k - V^k)}. \quad (9)$$

Рассмотрим преобразование силы F_e при переходе к другой, движущейся как целое (при $\frac{\partial^* \varepsilon'_{em}}{\partial t'} = 0$) произвольным образом системе отсчета. Пусть этот переход описывается некоторым преобразованием координат и времени вида (1).

Вычислим изменение компонентов силы в нештрихованной системе координат при таком переходе:

$$\Delta F_e = F_e - \frac{\partial^* x'^k}{\partial x^e} F'_k. \quad (10)$$

В силу инвариантности уравнения (7) относительно преобразований (1) его правую часть в формуле (10) можно заменить левой. Тогда вместо (10) получим

$$\Delta F_e = \Delta F_e^1 + \Delta F_e^2,$$

где

$$\Delta F_e^1 = \frac{DM}{dT} \cdot \left(v_e - \frac{\partial^* x'^k}{\partial x^e} v'_k \right), \quad (11)$$

$$\Delta F_e^2 = M \left(\frac{Dv_e}{dT} - \frac{\partial^* x'^k}{\partial x^e} \frac{Dv'_k}{dT} \right).$$

Вычисление ΔF_e^1 и ΔF_e^2 с учетом того, что компоненты х. и. скорости частицы в различных системах отсчета связаны соотношением

$$v_e - \frac{\partial^* x'^k}{\partial x^e} v'_k = v_e^0, \quad (12)$$

где $v_e^0 = \varepsilon_{em} v_0^m$ дает

$$\Delta F_e^1 = v_e^0 \frac{DM}{dT},$$

$$\Delta F_e^2 = M \left[\frac{\partial^* v_e^0}{\partial t} + v_0^k D_e v_k^0 + \left(\frac{\partial^* v_e^0}{\partial x^k} - \frac{\partial^* v_k^0}{\partial x^e} \right) v^k \right], \quad (13)$$

где через D_e обозначена операция х. и. ковариантного (в смысле ε_{ik}) дифференцирования по x^e .

Ясно, что ΔF_e^1 не имеет отношения к силе инерции, так как зависит лишь от относительной скорости систем отсчета и связана лишь с непостоянством массы частицы в гравитационном поле.

Вторая же величина ΔF_e^2 имеет, очевидно, смысл приращения силы инерции при переходе к другой системе отсчета.

Для того чтобы от выражения для приращения силы инерции перейти к выражению для самой силы, необходимо определить понятие инерциальной системы отсчета, т. е. такой системы отсчета, в которой сила инерции будет считаться равной нулю.

Вспомнив, что из всех потенциалов гравитационного поля ответственным за существование сил инерции является лишь векторный, будем называть систему отсчета инерциальной в данной точке и в данный момент времени в том случае, если в этой системе отсчета в данной точке и в данный момент времени вектор-потенциал гравитационного поля удовлетворяет условиям:

$$D_i V^k = 0, \quad \frac{\partial^* V^k}{\partial t} = 0. \quad (14)$$

В результате, потребовав выполнения условий (14) в штрихованной системе отсчета и заметив, что из (4) после умножения на ε_{em} следует

$$v_e^0 = V_e - V_i' \frac{\partial^* x'^i}{\partial x^e}, \quad (15)$$

из (13) после ряда вычислений получим

$$F_e^{\text{ин}} = M \left[\frac{\partial^* V_e}{\partial t} + V_k D_e V^k + \left(\frac{\partial^* V_e}{\partial x^k} - \frac{\partial^* V_k}{\partial x^e} \right) v^k \right],$$

или в векторной форме

$$\bar{F}_{\text{ин}} = M \left\{ \frac{\partial^* \bar{V}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{\bar{V}^2}{2} \right) - [\bar{v} \text{ rot } \bar{V}] \right\}. \quad (16)$$

Таким образом, в рамках трехмерного х. и. двухметрического формализма из компонентов метрического тензора можно построить новые трехмерные х. и. потенциалы гравитационного поля, один из которых (векторный) полностью описывает все инерционные явления.

Введение потенциала сил инерции позволяет, по крайней мере, среди недеформируемых систем отсчета, допускающих синхронизацию во всем пространстве (условия (6)), выделить инерциальные системы отсчета, в которых он удовлетворяет условиям (14).

Из полной силы, действующей на частицу в гравитационном поле, можно, выделить силу инерции (16), определяемую своим вектор-потенциалом $\bar{V}$ и являющуюся х. и. трехмерным вектором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosen N. Phys. Rev., 57, 147, 1940.
2. Пугачев Я. И. «Изв. вузов», физика, 6, 152, 1959.
3. Барынин В. А. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., № 6, 1969.

Поступила в редакцию
19.3 1969 г.

Кафедра
теоретической физики