## Вестник московского университета

№ 1 — 1970

УДК 534.16

## Л. К. ЗАРЕМБО, О. Ю. СЕРДОБОЛЬСКАЯ

## О ВЫНУЖДЕННЫХ СТОЯЧИХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Во втором приближении решается задача о возбуждении стоячих волн конечной амплитуды в твердом слое без потерь. Помимо этого решается задача о детектировании амплитудно-модулированной продольной и поперечной волны из-за нелинейных свойств среды. Анализируется влияние затухания по высокой частоте.

Исследование нелинейных эффектов при распространении упругих волн конечной амплитуды зачастую проводится в условиях возбуждения стоячих волн [1, 2, 3]. В твердых телах, где возможно распространение разных типов волн, бегущая поперечная волна может генерировать за счет нелинейности среды сложную продольную волну [4]. Для бегущих волн этот эффект чрезвычайно мал из-за отсутствия синхронизма и, следовательно, нарастания продольного компонента звука с расстоянием не происходит, так как скорость генерируемой продольной волны больше, чем скорость поперечной, вызывающей нелинейный эффект. Вместе с тем его удалось наблюдать в несколько измененном виде при возбуждении стоячей поперечной волны в стержне [2]. Поскольку при работе на стоячих волнах удается иногда значительно увеличить чувствительность методики наблюдения нелинейных волн, представляется интересным рассмотреть несколько простых задач о возбуждении нелинейных стоячих волн в твердых телах.

В настоящей работе рассмотрена с точностью до величин второго порядка малости задача о поперечной и продольной волне конечной амплитуды в твердом слое, а также нелинейное детектирование амплитудномодулированной звуковой волны твердым стержнем в случае возбуждения его продольной или поперечной волной.

Рассмотрим слой изотропного твердого тела  $0 \le x \le L$ . При x=0 в слой излучается поперечная волна, поляризованная вдоль оси *оу*:  $u_2^1$  (0, t) =  $u_0 \cos \omega t$ , где u — смещение в первом приближении по оси *оу*,  $u_0$  — его амплитуда.

При x = L граница свободна:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}\Big|_{x=L}=0.$$

Решение уравнения первого приближения, обычного волнового, как известно, имеет вид

$$u_2' = \frac{u_0 \cos k_\tau (L-x)}{\cos k_\tau L} \cos \omega t, \tag{1}$$

где  $k_{\tau}$  — волновое число для поперечной волны. Уравнение второго приближения имеет вид [4]

$$\frac{\partial^2 u''}{\partial t^2} - c_i^2 \frac{\partial^2 u''}{\partial x^2} = \frac{\beta_i}{\rho_0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_2}{\partial x}, \qquad (2)$$

где при генерации продольной волны под действием поперечной  $c_i \equiv c_l$ ,  $\beta_i = \beta_{\tau} = \rho_0 c_{\tau}^2 + \frac{A}{2} B$ , где A и B — модули третьего порядка,  $\rho_0$  — плотность невозмущенной среды,  $c_l$  и  $c_{\tau}$  — фазовые скорости продольных и поперечных волн. Подставляя (1) в (2), решение (2) с граничными условиями

$$u_1''|_{x=0} = \frac{\partial u''}{\partial x'}\Big|_{x=L} = 0$$
(3)

апишем в виде

$$u_{1}^{"} = \frac{\Gamma}{4c_{l}^{2}} \left\{ \frac{1}{k_{l}^{2}} \left[ \sin 2k_{\tau}L - \sin 2k_{\tau} \left(L - x\right) - 2k_{\tau}x \right] + \frac{1}{k_{l}^{2} - k_{\tau}^{2}} \left[ \sin 2k_{\tau} \left(L - x\right) - \sin 2k_{\tau}L \cos 2k_{l}x + \frac{\sin 2k_{\tau}x}{2k_{l} \cos 2k_{l}L} \left(2k_{\tau} - 2k_{l} \sin 2k_{\tau}L \sin 2k_{l}L\right) \cos 2\omega t \right\},$$

$$(4)$$

где  $\Gamma = \frac{\beta_{\tau} u_0^2 k_{\tau}^3}{4_{\rho} \cos^2 k_{\tau} L}$ . В силу применявшегося метода последовательных

приближений  $|u''| \ll |u'|$  и решение (4) непригодно в области, где его знаменатель обращается в нуль, т. е. в области резонансов слоя на поперечных волнах:

$$k_{\tau}L = \frac{2n-1}{2}\pi, \quad \omega = \frac{2n-1}{2}\frac{\pi c_{\tau}}{L},$$
 (5)  
(n = 1, 2, 3, ...).

Эти резонансы отмечены цифрой *1* на рис. 1. Здесь  $u_2 \sim \cos^{-1} k_\tau L$ , а  $u_1^r = \cos^{-2}k_\tau L$  и, следовательно,  $u_1^r/u_2 \rightarrow \infty$ . В равной мере это относится и к области резонансов на продольной волне, возникающих, как это видно, из 4) при условии

$$k_l L = \frac{2n-1}{4} \pi, \quad \omega = \frac{2n-1}{4} \frac{\pi c_l}{L},$$
 (6)  
(n = 1, 2, 3, ...).

Эти резонансы на рис. 1 отмечены цифрой 2, здесь  $u_2'$  конечно, а  $u_1 \rightarrow \infty$ .

Отметим некоторые особенности экспериментального наблюдения иелинейных резонансов (6). Излучение поперечной волны пьезопластинками, как правило, сопровождается излучением небольшой «примеси» продольной волны той же частоты, на которой может также резонировать слой. Однако эти резонансы удовлетворяют условию

$$k_{l}L = \frac{2n-1}{2}\pi, \quad \omega = \frac{2n-1}{2}\frac{\pi c_{l}}{L}, \qquad (7)$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

отличающемуся от (6); эти резонансные частоты отмечены цифрой 3 на рис. 1.

Задача о нелинейном возбуждении продольной стоячей волны может рассматриваться с более общей точки зрения, как нелинейное возбуждение быстрой волны медленной. Если скорости волн стремятся к c, а  $k_{\tau} \rightarrow k_l = k$ , т. е. если происходит синхронное возбуждение, решение (4) принимает вид

$$u_{1}^{''} = -\frac{\beta_{i}}{16\rho_{0}c^{2}} \frac{ku_{0}^{2}}{\cos^{2}kL} \left\{ \sin 2k(L-x) - \sin 2kL + kx + \left[ \frac{\sin 2kx}{\cos 2kL} - kx \cos 2k(L-x) \right] \cos 2\omega t \right\},$$
(8)



Рис. 1

что при  $\beta_i/\rho_0 c^2 = -(\gamma - 1)$ , где  $\gamma = c_p/c_v$  совпадает с полученным ранее в [5] решением для вынужденных колебаний слоя воздуха. Отметим, что (8) пригодно в качестве второго приближения при решении задачи о возбуждении продольной стоячей волной конечной амплитуды в слое, если считать  $\beta_i = \beta_l = = 3\rho_0 c_l^2 + 2A + 6B + 2C$ , где C — модуль третьего порядка и  $k = k_l$ .

Рассмотрим также явление акустического детектирования стерж-

нем. Если в изотропном стержне длиной L и толщиной  $d(L \gg d)$  распространяется амплитудно-модулированная волна звука (продольная или поперечная) конечной амплитуды, то при x=0

$$u'(0, t) = u_0 \left[ \cos \omega t - \frac{m}{2} \cos (\omega + \Omega) t - \frac{m}{2} \cos (\omega - \Omega) t \right],$$

где *m* — глубина модуляции, Ω — частота модуляции. Как и ранее, будем считать, что при *x*=*L* граница свободна

$$\frac{\partial u'}{\partial x}\Big|_{x=L}=0.$$

Представляет интерес экспериментально осуществимый случай [1, 2]  $\lambda \ll d$ ,  $\Lambda \gg d$ , где  $\lambda$  и  $\Lambda$  — длины волн на частотах  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно. Эти условия означают, что звук высокой частоты распространяется в стержне как в сплошном слое, и можно пренебречь влиянием боковых границ стержня. Решение уравнения первого приближения — обычного волнового уравнения — имеет, как и (1), вид

$$u' = u_0 \left[ \frac{\cos k_1 (L-x)}{\cos k_1 L} \cos \omega t - \frac{m}{2} \frac{\cos k_2 (L-x)}{\cos k_2 L} \cos (\omega + \Omega) t - \frac{m}{2} \frac{\cos k_3 (L-x)}{\cos k_3 L} \cos (\omega - \Omega) t \right],$$
(9)

где  $k_1 = \omega/c$ ,  $k_2 = (\omega + \Omega)/c$ ,  $k_3 = (\omega - \Omega)/c$ ,  $c = c_l$  при возбуждении в стержне продольных и  $c = c_{\tau}$  при возбуждении поперечных волн.

В результате нелинейного взаимодействия трех компонентов амплитудно-модулированной волны возникают вторичные волны комбинационных частот. Нас будет интересовать только продольная волна низкой частоты  $\Omega$ , которая, как ясно из условия  $\Lambda \gg d$ , распространяется в тонком стержне. Эти условия соответствуют условиям эксперимента [1, 2]. Уравнение для вторичной волны частоты  $\Omega$  имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_{\Omega}}{\partial t} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_{\Omega}}{\partial x^2} = \frac{\beta_i}{\rho_0} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \frac{\partial u'}{\partial x}, \qquad (10)$$

где  $\beta_i = \beta_l$  для основной продольной волны и  $\beta_i = \beta_{\tau}$  для поперечной,  $c_0 - c$ корость распространения продольной волны в тонком стержне.

Подставляя в правую часть (10) выражение (9), получим уравнение для низкочастотной волны Ω

$$\frac{\partial^2 u_{\Omega}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_{\Omega}}{\partial x^2} = \frac{\beta_i}{\rho_0} \frac{u_0^2 m \omega}{8c^3 \cos k_1 L} \left[ \frac{(2\omega + \Omega)(\omega + \Omega)}{\cos k_2 L} - \frac{(2\omega - \Omega)(\omega - \Omega)}{\cos k_3 L} \right] \sin \frac{\Omega (L - x)}{c} \cos \Omega t.$$
(11)

Общее решение (11) с граничными условиями

$$\frac{\partial u_{\Omega}^{'}}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u_{\Omega}^{'}}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0, \qquad (12)$$

т. е. для стержня со свободными от механических напряжений концами записывается следующим образом:

$$u_{\Omega}^{"} = \Gamma \left[ \sin \frac{\Omega (L-x)}{c} - \frac{c_{0}}{c} \sin \frac{\Omega (L-x)}{c_{0}} + \frac{c_{0}}{c} \frac{\left( \cos \frac{\Omega L}{c} - \cos \frac{\Omega L}{c_{0}} \right)}{\sin \frac{\Omega L}{c_{0}}} \cos \frac{\Omega (L-x)}{c_{0}} \right] \cos \Omega t, \quad (13)$$

где

$$\Gamma_{1} = \frac{\beta_{i} u_{0}^{2} m \omega^{2} \frac{c_{0}}{c}}{8 \rho_{0} c^{3} \Omega \left(1 - \frac{c_{0}^{2}}{c^{2}}\right)} \frac{1}{\cos k_{1} L} \left(\frac{1}{\cos k_{1} L} - \frac{1}{\cos k_{3} L}\right).$$

Амплитуда конца стержня x = L изменяется по закону:

$$u_{\Omega}^{"}|_{x=L} = \Gamma_{1} \left( \cos \frac{\Omega L}{c} - \cos \frac{\Omega L}{c_{0}} \right) \frac{1}{\sin \frac{\Omega L}{c_{0}}}.$$
 (14)

Решение (14) так же, как и (4), имеет резонансный вид по основным частотам  $\omega$  и  $\omega + \Omega$ ,  $\omega - \Omega$  и по комбинационной частоте  $\Omega$ . Как и для (4), все выводы справедливы вдали от резонансов, пока выполняется условие u'' < u'.

51/2 ВМУ, № 1, физика, астрономия

65

Учет затухания упругих волн усложняет задачу, однако можно рассмотреть два крайних случая: когда затухание звука основной частоты велико  $\alpha L \gg 1$  и когда затухание мало на длине стержня  $\alpha L \ll 1$ .

В первом случае, как и всюду в дальнейшем, однако, предполагается, что затухание мало на расстоянии, равном длине волны  $\alpha \ll \omega/c$ . Считая, что высокочастотные составляющие к концу стержня сильно затухают, можно пренебречь обратной волной высокой частоты и считать, что решение волнового уравнения в первом приближении есть бегущая волна

$$-\frac{m}{2}\sin\left(\omega+\Omega\right)\left(t-\frac{x}{c}\right)$$
$$u' = u_0 e^{-\alpha x} \left\{\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)-\frac{m}{2}\sin\left[\left(\omega-\Omega\right)\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\right\}.$$
(15)

Подставляя решение (15) в правую часть уравнения (10), получаем для низкочастотной комбинационной составляющей уравнение

$$\frac{\partial^2 u_{\Omega}}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_{\Omega}}{\partial x^2} = \frac{\beta_i u_0^2 m \omega^2 \Omega}{\rho_0 c^3} e^{-2\alpha x} \sin \Omega \left( t - \frac{x}{c} \right)$$
(16)

с граничными условиями

$$\frac{\partial u''}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u''}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0.$$
(17)

Решая уравнение (16), получаем амплитуду конца стержня в виде

$$u_{\Omega}^{''}|_{x=L} = \frac{\beta_i u_0^2 m \omega^2}{2\alpha c^3 c_0 \rho_0} \frac{1}{\sin \frac{\Omega L}{c_0}} \sin \Omega t.$$
(18)

Это решение соответствует решению, полученному в [6] для бесконечной среды.

Считаем, что во втором случае при  $\alpha L \ll 1$  длина стержня имеет порядок длины волны  $\Lambda$  и  $\alpha \ll \frac{\Omega}{c_0} \ll \frac{\omega}{c}$ , а затухание низкой частоты как и в первом случае пренебрежимо мало.

Не выписывая громоздких выражений, отметим, что решение первого приближения имеет вид, аналогичный (9) с комплексными волновыми числами. Подставляя действительную часть этого выражения в уравнение (10), получаем решение, которое дает при x=L амплитуду колебаний низкой частоты в виде

$$u_{\Omega}^{'} = \frac{\beta_{i}u_{0}^{2}m^{2}\frac{c_{0}}{c}\left(\cos\frac{\Omega L}{c}-\cos\frac{\Omega L}{c_{0}}\right)}{8\rho_{0}\Omega\left(1-\frac{c_{0}^{2}}{c^{2}}\right)c^{3}}\frac{1}{\sin\frac{\Omega L}{c_{0}}}\cos\Omega t\left\{\frac{\cos k_{1}L}{\cosh 2aL+\cos 2k_{1}L}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{\cos k_{2}L}{\cosh 2aL+\cos 2k_{2}L}-\frac{\cos k_{3}L}{\cosh 2aL+\cos 2k_{3}L}\right]\right\}.$$
(19)

На рис. 2 показана экспериментальная зависимость амплитуды продольных колебаний стержня на частоте  $\Omega$  от несущей частоты  $\omega$  для двух алюминиевых стержней длиной 25 см (I) и 75 см (II). Эксперимент проводился с продольными волнами на частоте 3 мгц. При получении этих кривых применялась методика, описанная в [1, 2]. Здесь же приведены расчетные кривые для выражения  $F(\omega)$ , стоящего в фигурных скобках (19). Поскольку в эксперименте не определялись значения  $\beta_i = \beta_i$ ,  $u_0^2$  и добротность стержня на низкой частоте, графики (I) и (II) нормировались на один из максимумов теоретических кривых, взятых для  $\alpha L_1 = 0,05$  (I) и  $\alpha L_2 = 0,15$  (II). По оси абсцисс отложена расстройка (в единицах  $\omega L/c_i$ ) относительно частоты  $\omega_0$ , при которой  $\cos k_1 L = 0$ .

При анализе приведенных результатов следует остановиться несколько подробнее на соотношении диссипативных и нелинейных свойств среды, которые характеризуются акустическим числом Рейнольдса  $Re = p_0/b\omega$ , где  $p_0$  — амплитуда звукового давления в основной волне, b — коэффициент, учитывающий вязкость и теплопроводность. Для акустического резонатора, который представляет собой стержень, число Рейнольдса имеет вид  $Re = u_0 k_1^2 / \alpha$ . Приведенное выше решение (4) и (13), очевидно, пригодно при Re→∞. Решение (18) и (19) справедливо при малых числах Рейнольдса Re≪1, так как вязкие потери принима-



Рис. 2

лись во внимание уже в первом приближении. В этом случае, как известно, коэффициент затухания не зависит от амплитуды волны и не происходит образования пилообразных волн по высокой частоте. В алюминии Re~1 при смещениях  $u_0 \sim 2 \cdot 10^{-6}$  см, что соответствует напряжению на кварцевом излучателе ~104 в. Приведенные на рис. 2 экспериментальные результаты соответствуют  $\text{Re} \sim 0.05$ . Однако, как указывалось в [2], обнаружение эффекта при столь незначительной нелинейности возможно за счет высокой добротности стержня по низкой частоте.

В материалах с малым затуханием, таких, как кварц или LiNbO<sub>3</sub>, возможно образование пилообразной волны уже при сравнительно малых мощностях. Так, для LiNbO3 Re~1 при акустической мощности 0,1 вт на частоте 20 мгц. Это открывает дополнительные возможности при исследовании нелинейных свойств твердых тел.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1. Зарембо Л. К., Красильников Случ В. Н., B. A., Сухаревская О. Ю. «Акустический журнал», 12, 486, 1966. 2. Сухаревская О. Ю. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 2, 96, 1967. 3. Говорова Е. З., Фирсова М. М. «Кристаллография», 9, 459, 1964. 4. Гольдберг З. А. «Акустический журнал», 6, 307, 1960. 5. Зарембо Л. К. «Акустический журнал», 13, 298, 1967. 6. Нагульных К. А., Солуян С. И., Хохлов Р. В. «Акустический журнал»,

- 9, 2, 1963.

Поступила в редакцию 10.4 1969 г.

Кафедра акустики