

И. П. ЗВЯГИН

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТАТИЧЕСКИХ ДОМЕНОВ

Рассмотрен вопрос об устойчивости статического домена относительно малых флуктуаций поля и плотности заряда при однородных граничных условиях общего вида. Найдены области устойчивости статических доменов и показано, что для широкого класса граничных условий статический домен оказывается устойчивым.

Введение

Статический домен представляет собой неоднородное распределение напряженности электрического поля $E(x)$ и плотности заряда носителей $\rho(x)$ в среде с отрицательной дифференциальной проводимостью (ОДП). На фазовой плоскости статический домен описывается траекторией, проходящей через окрестности двух особых точек [1, 3].

Вольтамперная характеристика (ВАХ) образца, содержащего статический домен, в достаточно длинных образцах должна иметь плато при $j = j_{\max}$ или $j = j_{\min}$, где j_{\max} и j_{\min} — токи, отвечающие экстремумам ВАХ. Положение плато определяется природой контактов, т. е. видом граничных условий. В работе [4] была выяснена связь между положением плато и природой контактов и показано, что для «сильных» контактов, т. е. контактов, свойства которых почти не меняются при прохождении тока, при изучении вида распределения поля в образце можно приближенно считать концентрацию (или напряженность поля) заданной. Граничные условия для малых отклонений от распределений такого типа, вообще говоря, нельзя получить простой вариацией, как это сделано в [4], в силу приближенного характера последних. Вид граничных условий для флуктуаций находится путем детального рассмотрения явлений, происходящих в контакте, последнее, однако, не входит в наше рассмотрение. Поскольку вопрос о точной форме граничных условий пока остается открытым, мы рассмотрим, как зависит результат исследования устойчивости статического домена от вида граничных условий, задаваясь граничными условиями возможно более общего вида. В дальнейшем ограничимся рассмотрением простой модельной системы с дрейфовой нелинейностью (см., например, [5]) с учетом термоэлектрического тока.

Поведение малых одномерных флуктуаций напряженности поля в

такой системе описывается уравнением, получаемым линеаризацией системы исходных уравнений

$$(D\delta E_x)_x - v\delta E_x + \frac{4\pi}{\epsilon}(D_E \rho \delta E)_x - \frac{4\pi\rho}{\epsilon}v_E \delta E - \lambda \delta E + \frac{4\pi}{\epsilon}\delta j_0 = -\lambda\psi(x). \quad (1)$$

Здесь $D(E(x))$ и $v(E(x)) = \mu[E(x)]E(x)$ — коэффициент диффузии и дрейфовая скорость, зависящие для рассматриваемой модели только от напряженности поля, $\delta E(x, \lambda)$ и $\delta j_0(\lambda)$ — изображения Лапласа флуктуаций напряженности поля и плотности полого тока (не зависящего от координаты x), $\psi(x) = \delta E(x, t)|_{t=0}$ — начальное значение флуктуации напряженности поля, а ϵ — электрическая постоянная.

В качестве граничных условий к уравнению (1) выберем однородные смешанные граничные условия на каждой из границ (при $x=0$ и при $x=L$):

$$\begin{aligned} \delta E(0, \lambda) + a_1 \delta E_x(0, \lambda) &= 0, \\ \delta E(L, \lambda) + a_2 \delta E_x(L, \lambda) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где a_1 и a_2 — постоянные, не зависящие от λ . При $a_i \rightarrow 0$ граничные условия (2) переходят в условия, когда на контактах фиксирована полная напряженность поля (будем их называть ГУ₁), а при $a_i \rightarrow \infty$ — полная концентрация носителей (будем называть ГУ₂). Не любой выбор постоянных a_1 и a_2 можно считать физически оправданным. Естественно, например, исключить из рассмотрения граничные условия, приводящие к неустойчивости обычного однородного распределения поля и заряда в среде с положительной дифференциальной проводимостью (ПДП). Именно к такой «нефизической» неустойчивости приводит, в частности, выбор граничных условий в виде (2), когда $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, а $|a_1|$ и $|a_2|$ не слишком велики (в отсутствие тока $|a_1|, |a_2| < l_d$, l_d — длина Дебая).

С учетом закона Кирхгофа:

$$R\delta j_0(\lambda) + \int_0^L \delta E(x, \lambda) dx = \delta \mathcal{E} \quad (3)$$

(R — сопротивление внешней цепи, поперечное сечение образца равно единице, $\delta \mathcal{E}$ — малая переменная э. д. с. в цепи) проведем разложение $\delta E(x, \lambda)$ по полной системе собственных функций $\alpha_n(x)$ самосопряженной задачи

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\alpha - \lambda \frac{\theta}{D}\alpha &= 0, \quad (a) & \alpha(0) + a_1 \alpha_x(0) &= 0, \quad (b) \\ \alpha(L) + a_2 \alpha_x(L) &= 0, \quad (в) \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\mathcal{L}\alpha = (\theta \alpha_x)_x - \frac{4\pi\rho}{\epsilon} \frac{\theta}{D} v_E \alpha - \frac{4\pi}{\epsilon D} (D_E \rho)_E E_x \alpha,$$

а

$$\theta = \exp \left[- \int_0^x \frac{dx}{D} (v - D_E E_x - \frac{4\pi\rho}{\epsilon} D_E) \right].$$

Условие разрешимости задачи (1), (2) приводит к уравнению

$$\prod_n (\lambda - \lambda_n) \left(1 + \frac{4\pi}{\epsilon R} \sum_n \frac{\int_0^L \alpha_n dx \int_0^L \frac{\theta}{D} \alpha_n dx}{\lambda - \lambda_n} \right) = 0, \quad (5)$$

определяющему спектр флуктуаций в системе. В режиме заданного тока ($\delta j_0 = 0$) спектр флуктуаций совпадает со спектром задачи (4). Наличие хотя бы одного положительного собственного значения среди λ_n означает неустойчивость распределения в режиме заданного тока. Если собственная функция α_s , соответствующая положительному собственному значению λ_s , такова, что $\int_0^L \alpha_s dx = 0$, т. е. флуктуация не выходит во внешнюю цепь, то $\lambda = \lambda_s$ содержится в спектре флуктуаций системы при любых R , и распределение неустойчиво при любых значениях внешней нагрузки. Для возмущений, выходящих во внешнюю цепь, с уменьшением R происходит уменьшение λ_0 , и в режиме заданного напряжения система может стать устойчивой.

Области устойчивости статического домена

Для исследования спектра задачи (4) рассмотрим характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$, который для граничных условий (4, а и 4, в) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = -\alpha_{1x}(L, \lambda) \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1(L, \lambda) \alpha_1 + \alpha_{2x}(L, \lambda) \alpha_2 + \alpha_2(L, \lambda), \quad (6)$$

где $\alpha_1(x, \lambda)$, $\alpha_2(x, \lambda)$ — фундаментальная система решений уравнения (4, а), удовлетворяющая условиям

$$\alpha_1(0, \lambda) = 1, \quad \alpha_{1x}(0, \lambda) = 0,$$

$$\alpha_2(0, \lambda) = 0, \quad \alpha_{2x}(0, \lambda) = 1.$$

Нетрудно убедиться, что функция E_x есть решение этого уравнения при $\lambda = 0$, и можно явно вычислить $\Delta(0)$, положив $\varphi_1(x) = \alpha_1(x, \lambda)|_{\lambda=0}$ и $\varphi_2(x) = \alpha_2(x, \lambda)|_{\lambda=0}$:

$$\varphi_1 = \frac{E_x}{E_x(0)} - E_{xx}(0) E_x I(x), \quad (7)$$

$$\varphi_2 = E_x(0) E_x I(x).$$

Здесь

$$I(x) = p.f. \int_0^x \frac{W dx}{E_x^2}, \quad (8)$$

$W = \theta^{-1}$ — вронскиан уравнения (4 а), а символ *p.f.* означает конечную часть интеграла¹.

Заметим, что для граничных условий функция E_x не есть собственная функция задачи (4 б, в). При специальном выборе граничных условий E_x может стать собственной функцией задачи, отвечающей собственному значению $\lambda = 0$. Так, например, обстоит дело, если вообще пренебречь влиянием границ и рассматривать бесконечный образец [6]; фазовая траектория в этом случае соединяет две особые точки, и функция E_x

¹ Другими словами, если функция E_x имеет нуль, то необходимо провести вычитание особенности. Пусть нуль функции E_x расположен в точке $x = x_0$, тогда символ *p.f.* означает

$$p.f. \int_0^x \frac{W dx}{E_x^2} = \frac{W(x_0)}{E_{xx}^2(x_0)} \left\{ \int_0^x dx \left[\frac{W}{W(x_0)} \frac{E_{xx}^2(x_0)}{E_x^2} - \frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{1}{x_0(L-x_0)} \right] \right\}.$$

удовлетворяет условиям ограниченности на бесконечности. Если функция E_x не имеет нулей (простой слой), то согласно осцилляционным теоремам [7] она будет собственной функцией основного состояния, т. е. $\lambda_n \geq 0$. Сама собственная функция E_x описывает малое перемещение стенки домена. Ясно, что такое смещение стенки вызывает изменение полного падения напряжения на образце, и флуктуации подобного типа окажутся невозможными в режиме заданного напряжения. Это непосредственно вытекает и из соотношения (5), поскольку $\int_0^L E_x dx \neq 0$ (E_x — собственная функция основного состояния, не имеющая нулей).

Как уже отмечалось, природа контактов может оказаться существенной для однозначного нахождения вида распределения поля, поэтому априори неясно, в какой мере оправдано такое пренебрежение влиянием границ в задаче о статическом домене. Математически чувствительность задачи к виду граничных условий связана с тем, что даже малое возмущение может вызвать смещение собственного значения $\lambda=0$ в область $\lambda > 0$, т. е. в принципе привести к неустойчивости системы в режиме заданного тока. Поскольку собственные значения задачи (4) совпадают с нулями $\Delta(\lambda)$, исследование спектра λ_n сводится к определению числа положительных нулей характеристического детерминанта. Последнее можно найти, зная $\Delta(0)\Delta(\infty)$ и используя осцилляционные теоремы для задачи (4) [7].

Согласно [4], когда оба контакта сильные антизапорные (или оба запорные) (случай А), функция E_x не имеет нулей. Функция $\varphi = \varphi_1 - \frac{1}{a_1} \varphi_2$, удовлетворяющая граничному условию (4б), не может иметь более одного нуля, так как в противном случае E_x , линейно независимое с φ решение уравнения (4 а), обязано было бы иметь нуль. Функция φ имеет нуль, если $\varphi(0)\varphi(L) < 0$, т. е. если

$$\frac{1}{a_1} > \frac{\varphi_1(L)}{\varphi_2(L)} = \frac{E_x(L) - E_x(0) E_x(L) E_{xx}(0) I(L)}{E_x(0) E_x(L) I(L)}. \quad (9)$$

При выполнении неравенства (9) основное состояние лежит в области $\lambda > 0$, и распределение неустойчиво. При выполнении обратного неравенства определитель $\Delta(\lambda)$ имеет нуль при $\lambda > 0$, лишь если знаки $\Delta(0)$ и $\Delta(\infty)$ различны. Асимптотическое значение $\Delta(\lambda)$ легко найти из уравнения (4 а):

$$\Delta(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\cong} \frac{e^{\sqrt{\lambda} L}}{2\sqrt{\lambda}} (1 + a_2 \sqrt{\lambda}) (1 - a_1 \sqrt{\lambda}) \quad (10)$$

($\sqrt{\lambda} L \gg 1$). Определитель $\Delta(\infty)$ положителен во II и IV квадрантах плоскости (a_1, a_2) , отрицателен — в I и III квадрантах и обращается в нуль на прямых, параллельных координатным осям и сколь угодно близко (при достаточно больших λ) к ним подходящих. Равенство $\Delta(0) = 0$ определяет положение кривых, отделяющих области положительных и отрицательных значений $\Delta(0)$. Области, в которых знаки $\Delta(0)$ и $\Delta(\infty)$ совпадают (на рисунке заштрихованы), отвечают случаю, когда положительные λ_n отсутствуют и распределение устойчиво. Как ГУ₁, так и ГУ₂ попадают в область устойчивости¹.

¹ Устойчивость статического домена в случае рекомбинационной нелинейности при ГУ₁ получена в работе [8] другим методом.

Когда контакты различны (один — запорный, другой — антизапорный: случай Б), функция E_x обращается в нуль на отрезке $[0, L]$, и функция φ может иметь нуль, один или два нуля. Если функция φ_2 имеет нуль в $[0, L]$, т. е. если

$$\varphi_2(L) < 0, \quad (11)$$

то функция φ имеет по крайней мере один нуль, и наименьшее собственное значение положительно. При $\varphi_2(L) > 0$ функция φ имеет не более одного нуля. Она имеет нуль (неустойчивость), если $\varphi(L)\varphi(0) < 0$, т. е. если выполнено неравенство (9). При выполнении неравенства, обратного неравенству (9), положительные собственные значения отсутствуют, а распределение устойчиво, если знаки $\Delta(0)$ и $\Delta(\infty)$ совпадают. Положение и форма областей устойчивости системы зависят от величины и знака интеграла $I(L)$; в частности, при $I(L) > 0$ положительные собственные значения имеются для любых a_1, a_2 , и распределение всегда неустойчиво в режиме заданного тока, а при

$$I(L) < - \left(\frac{1}{|E_x(0)E_{xx}(0)|} + \frac{W(L)}{E_x(L)E_{xx}(L)} \right) \quad (12)$$

области устойчивости имеют изображенную на рисунке форму.

Обсуждение полученных результатов

Для того чтобы применить полученные результаты к исследованию устойчивости статического домена в случае Б, нужно оценить знак и величину $I(L)$ для исследуемого распределения поля. Из формулы (8) видно, что основной вклад в $I(L)$ дают области медленного изменения поля, где производная E_x мала. Поэтому если распределение поля близко к ступенчатому (образец длинный), то для оценки $I(L)$ достаточно найти вклады плоских участков, пренебрегая вкладами приконтактных областей и стенки. Соответствующая оценка для случая Б дает

$$I(L) \sim \frac{l_1}{\Delta E^2} e^{d/l_1} \left(d^2 - \xi \frac{l_{d_2}^4}{l_1 l_2} \sqrt{1 + \frac{4l_2^2}{l_{d_2}^2} e^{\eta(L-a)/l_2}} \right), \quad (13)$$

где

$$l_i^{-1} = \frac{v_i}{D_i}, \quad l_{d_i}^{-2} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\epsilon} \frac{\mu_i}{D_i},$$

ΔE — характерная величина изменения поля на плоском участке, ξ — множитель порядка единицы $\eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4l_2^2}{l_{d_2}^2} \right)^{1/2}$, $i = 1, 2$, индекс 1 относится к плоскому участку, поле на котором близко к полю в соответствующем экстремуме ВАХ, а индекс 2 — ко второму плоскому участку с ПДП. Когда оба плоских участка занимают конечные части образца, т. е. когда $L-d, d \gg \lambda a_i, l_i$, второй член в (13) значительно больше первого, так что

$$I(L) \sim - \xi \frac{l_{d_2}^4}{l_2 \Delta E^2} e^{d/l_1} e^{\eta(L-a)/l_2} \sqrt{1 + \frac{4l_2^2}{l_{d_2}^2}}. \quad (13')$$

При тех же предположениях $(|E_x(0)E_{xx}(0)|)^{-1} \ll W(L)(E_x(L)E_{xx}(L))^{-1}$,
а

$$\frac{W(L)}{E_x(L)E_{xx}(L)} \sim \frac{1}{\Delta E^2} \left(\frac{l_2^3}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4l_2^2}{l_1^2}} \right)^3} \right) e^{\alpha/e_1(L-d)/l_2} \quad (14)$$

Сравнение выражений (13') и (14) показывает, что в указанных условиях величина $|I(L)|$ превосходит $W(L)(E_x(L)E_{xx}(L))^{-1}$, т. е. выполняется неравенство (12).

Таким образом, топология области неустойчивости одинакова в случаях А и Б (см. рисунок), т. е. как ГУ₁, так и ГУ₂ попадают в область устойчивости распределения.

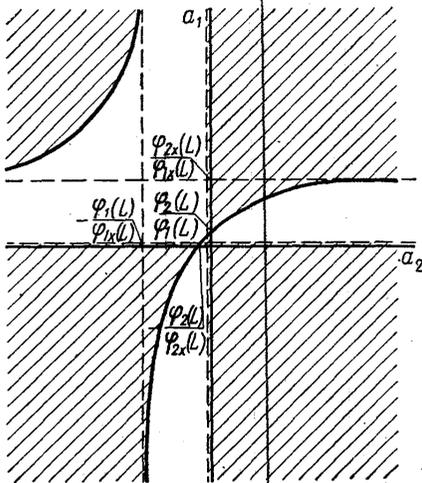


Рис. 1

Появление области неустойчивости на плоскости (a_1, a_2) связано не с особыми свойствами распределения поля в среде с ОДП, а с особенностями граничных условий. Аналогичная («нефизическая») область неустойчивости появляется и в отсутствие ОДП. Наличие ОДП приводит лишь к некоторому смещению границ этой области. Можно считать, что реальные граничные условия не попадают в область неустойчивости, если контакты не приводят к неустойчивости однородного распределения с ПДП. Итак, распределение поля, отвечающее статическому домену, оказывается устойчивым в режиме заданного тока для весьма широкого класса граничных условий.

На основании уравнения (5) можно предположить, что при переходе к режиму заданного напряжения исследуемое распределение остается устойчивым.

Выражаю благодарность В. Л. Бонч-Бруевичу и участникам руководимого им семинара, а также Ю. Ф. Соколову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kagan M. S., Kalashnikov S. G., Zhdanova N. G. Phys. Stat. sol., 24, 551, 1967.
2. Караваев Г. Ф. «Физика твердого тела», 9, 3604, 1967.
3. Boer K. W., Voss P. Phys. Rev., 171, 899, 1968.
4. Соколов Ю. Ф. Препринт ИРЭ АН СССР, 1968.
5. Knight B. W., Peterson G. A. Phys. Rev., 155, 393, 1967.
6. Волков А. Ф., Коган Ш. М. «Успехи физич. наук», 96, 633, 1968.
7. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
8. Соколов Ю. Ф. Препринт ИРЭ АН СССР, 1969.

Поступила в редакцию
21.4 1969 г.

Кафедра
полупроводников