Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1970

УДК 538.56.01

А. Н. ВАХРАМЕЕВ

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В КОНТУРЕ С МАЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Экспериментально исследуются субгармонические колебания третьего порядка в системе, адекватной уравнению первого приближения. Выясняются условия их существования.

В работах [1—4] субгармонические колебания третьего порядка и выше экспериментально наблюдались только в колебательных системах с большой нелинейностью. Приводимые осциллограммы токов и напряжений возбуждаемых субгармонических колебаний весьма отличаются от гармонических, т. е. основной частоте сопутствует целый ряд гармоник с весьма значительными амплитудами. Математическое рассмотрение субгармонических процессов проводится методом первого приближения, обычно применяемым для колебательных систем с малой нелинейностью. Естественно, что при этом заведомо опускается влияние на систему как гармоник, так и их комбинационных компонентов. Между тем присутствие последних в реальных колебательных системах может оказать существенное влияние на процессы возбуждения и существования субгармонических колебаний и даже играть принципиальную роль. Поэтому представляется интересным провести экспериментальное исследование системы, адекватной уравнению первого приближения (тем более, что приводимые в работах [1—4] экспериментальные результаты лишь качественно отражают результаты расчета). Это позволило бы судить о механизме протекающих процессов и о физической природе субгармонических колебаний.

Для выяснения условий, при которых в нелинейном контуре можно ожидать возбуждение субгармонических колебаний третьего порядка, определим область их существования из решения первого приближения дифференциального уравнения контура. В качестве нелинейного элемента контура используем барьерную емкость p—n-перехода полупроводникового диода. При аппроксимации вольткулоновой характеристики нелинейной емкости ограничимся полиномом третьей степени

$$g(U) = c_0 (U + \sigma_1 U^2 + \gamma_1 U^3), \tag{1}$$

где c_0 — статическая емкость диода

$$\sigma_1 = \frac{1}{4u_0}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{8u_0^2}, \quad u_0 = u_k - u_c,$$

u_k — контактная разность потенциалов, u_c — напряжение смещения на диоде.

Изменением напряжения смещения на диоде можно подобрать необходимую величину нелинейности вольткулоновой характеристики его емкости. Затухание в таком контуре вполне можно считать постоянным, если суммарная амплитуда всех напряжений на диоде не превосходит напряжения смещения. Это позволяет рассмотреть чисто расстроечный механизм ограничения колебаний.

Применение в исследуемом колебательном контуре балансной схемы включения нелинейной емкости дает возможность получить на индуктивности контура напряжение, практически свободное от присутствия сигнала внешнего воздействия. Дифференциальное уравнение такого контура, естественно, будет без правой части, ибо вынуждающая сила непосредственно прикладывается к нелинейной емкости. Однако балансная схема включения нелинейного элемента не является принципиальной особенностью, отличающей его от обычного последовательного нелинейного контура при постоянном затухании. Действительно, в этом случае уравнения первого приближения совпадают с аналогичными уравнениями, полученными из дифференциального уравнения с правой частью для нелинейного контура с последовательным включением вынуждающей силы. Поэтому в первом приближении, в котором и ведется все рассмотрение, можно считать, что механизм колебательных процессов, протекающих в контуре с балансным включением нелинейной емкости, не отличается от процессов в обычном нелинейном контуре. Экспериментальное же исследование процессов на частоте, близкой к собственной частоте контура, гораздо проще проводить при балансной схеме включения нелинейной емкости.

Делая обычные предположения о малости величины затухания контура, расстройки и малости коэффициентов при нелинейных членах, пренебрегая членами второго порядка малости, уравнение контура для напряжения на емкости примет вид

$$\ddot{U} + U = -\delta\dot{U} + \xi U - \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\tau^2}\left[\sigma_1 (U + U_3)^2 + \gamma_1 (U + U_3)^3\right],$$

где

$$\delta = \frac{R}{\omega L}; \quad \xi = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \omega_0 \frac{1}{2c_0 L}, \quad \tau = \omega t,$$

$U_3 = P\sin 3\tau$ — напряжение вынуждающей силы.

Отыскивая решение этого уравнения методом медленно меняющихся амплитуд в виде $U = A\sin(\tau + \varphi)$, получаем укороченные уравнения для амплитуды и фазы субгармонических колебаний

$$\dot{A} = -\frac{\delta}{2}A + \frac{1}{2}\gamma P A^2 \sin 3\varphi,$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\xi}{2} - \frac{1}{2}\gamma(A^2 + 2P^2) + \frac{1}{2}\gamma P A\cos 3\varphi, \tag{2}$$

где $\frac{3}{8}\gamma_1 = \gamma$.

Положив $\dot{A}=0$, $\varphi=0$, найдем значение стационарной амплитуды и фазы субгармонических колебаний

$$\gamma A^2 = -\left(\xi + \frac{3}{2}\gamma P^2\right) \pm \sqrt{-\frac{7}{4}\gamma^2 P^4 - \xi\gamma P^2 - \delta^2}, \tag{3}$$

$$\sin 3\varphi = \frac{\delta}{\gamma P A}. \tag{4}$$

Условие устойчивости найденных решений

для амплитуды:

$$\sqrt{-\frac{7}{4}\gamma^2 P^4 - \xi\gamma P^2 - \delta^2} > 0, \tag{5}$$

для фазы:

$$\cos 3\varphi > \frac{P}{2A}. \tag{6}$$

При выполнении условия устойчивости (5) стационарная амплитуда колебаний, определяемая уравнением (3), всегда будет действительной величиной. Поэтому ее существование в контуре определяется только условием устойчивости. Из условия устойчивости для фазы (6) видно, что оно всегда выполняется, если выполняется условие устойчивости для стационарной амплитуды. Таким образом, для нахождения всей совокупности значений параметров контура и амплитуд вынуждающей силы, при которых возможно существование субгармонических колебаний, достаточно рассмотреть условие устойчивости (5). Как видно из (1), для нелинейной емкости p—n перехода диода $\gamma>0$, поэтому условие устойчивости выполняется только при отрицательных расстройках.

Из условия устойчивости (5) следует, что имеется некоторое минимальное пороговое значение амплитуды вынуждающей силы

$$P^2_{\min} = -\frac{2}{7}\,\frac{1}{\gamma}\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 7\delta^2}\right),$$

ниже которой колебания не возникают, а также имеется некоторое максимальное значение вынуждающей силы

$$P^2_{\max} = -\frac{2}{7}\,\frac{1}{\gamma}\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 7\delta^2}\right),$$

выше которой колебания отсутствуют. При $\xi=-\sqrt{7}\delta$ максимальное и минимальное значения вынуждающей силы сливаются, и при расстройке $\xi>-\sqrt{7}\delta$ колебания в контуре не возбуждаются (рис. 1).

Эти особенности области существования субгармонических колебаний в нелинейном контуре определяются своеобразием протекающих в нем физических процессов. Как видно из уравнения (2), член $\gamma(A^2+2P^2)$ определяет расстройку контура, за счет которой происходит ограничение амплитуды возбуждаемой в нем субгармоники. Величина этой расстройки зависит не только от амплитуды возбуждаемых колебаний, но и от амплитуды вынуждающей силы. Таким образом, в механизме ограничения субгармонических колебаний участвует и вынуждающая сила.

Механизм вложения энергии в субгармонические колебания также отличается некоторым своеобразием. Поступление энергии в контур для поддержания колебаний в значительной мере определяется и амплитудой возбуждаемой субгармоники. В самом деле, на нелинейный реактивный элемент колебательного контура наряду с вынуждающей силой действует и возбуждаемая субгармоника. В результате их комбинационного взаимодействия возникают внутренние силы с различными комбинационными частотами. Одна из них, с частотой $(3\omega-2\omega)$, близкой к собственной частоте контура, при соответствующих условиях и поддерживает в нем колебания с частотой ω, т. е. субгармонические колебания. Из сопоставления уравнения (2) с хорошо известными укороченными уравнениями для параметрически возбуждаемого контура с периодически изменяющейся емкостью нетрудно заметить, что вложение энергии в контур при субгармонических колебаниях определяется произведением $\frac{1}{2}\gamma AP$.

Отмеченные особенности механизма ограничения амплитуды и вложения энергии для субгармонических колебаний позволяют судить о явлениях, происходящих вблизи границы области их существования. При сравнительно большой вынуждающей силе в расстроечном механизме контура проявляет себя расстройка, зависящая от амплитуды этой силы. По мере увеличения последней происходит дополнительный уход собственной частоты контура, приводящий к быстрому уменьшению амплитуды возбуждаемой в нем субгармоники, а вместе с этим уменьшается и вложение энергии в контур. Для критического значения амплитуды вынуждающей силы поступающей энергии становится недостаточно для поддержания колебаний и они затухают. При отсутствии затухания «потолок» для вынуждающей силы сохраняется. В этом случае частота возбуждаемой субгармоники просто оказывается вне полосы пропускания контура, и колебания не возбуждаются.

«Пороговое» значение вынуждающей силы, при которой возможно существование субгармонических колебаний в контуре, определяется минимальной энергией, поступающей в контур и достаточной для поддержания колебаний. Естественно, что при отсутствии затухания в контуре «порог» пропадает.

Область существования субгармонических колебаний имеет еще одну интересную особенность, связанную со спецификой вложения энергии. Из приводимых на рис. 1 зависимости границы области от расстройки и амплитуды вынуждающей силы можно видеть, что величина затухания контура в известных пределах не служит препятствием для возбуждения в нем субгармонических колебаний. Для их возбуждения при повышенном затухании в контуре достаточно увеличить его расстройку. При этом, как видно из рис. 2, минимальная величина амплитуды, с которой в контуре возможны субгармонические колебания, возрастает. В этом случае, при неизменной вынуждающей силе, происходит увеличение вложения энергии в систему за счет амплитуды возбуждаемой субгармоники.

При относительно больших затуханиях необходимая величина амплитуды субгармоники, с которой возможны устойчивые колебания, может оказаться столь велика, что ее практически нельзя будет осуществить в реальном контуре. При использовании в контуре реального реактивного нелинейного элемента приходится считаться с тем, что прикладываемая к нему суммарная амплитуда напряжений или суммарная величина токов всегда ограничивается шириной его динамического диапазона. Так, в случае использования в качестве нелинейного элемента емкости *p—n* перехода полупроводникового диода, сумма всех напряжений на нем не должна превосходить напряжение смещения.

Исходя из рассмотренных нами процессов, протекающих в нелинейном контуре при субгармонических колебаниях, нетрудно объяснить и влияние изменения величины коэффициента нелинейности на область их существования. Так, с увеличением коэффициента нелинейности «потолок» для вынуждающей силы снижается (для $\delta=0$ он определяется особенно просто: $P=-\frac{4}{7}\gamma^{-1}\xi$). При этом уменьшается и минимальное значение возможной устойчивой амплитуды субгармонических колебаний $\left(A^2=\frac{1}{4}P^2+\delta^2\gamma^{-2}P^{-2}\right)$.

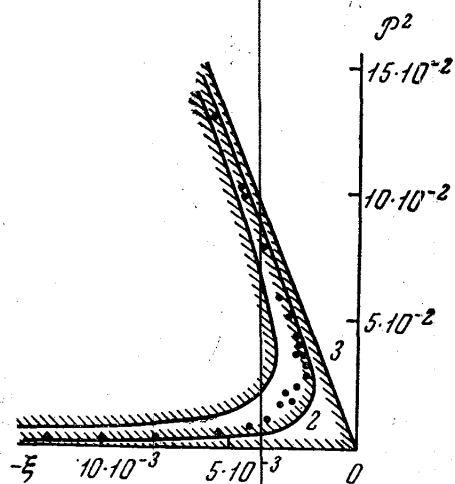

Рис. 1. Область существования субгармонических колебаний в зависимости от расстройки и амплитуды вынуждающей силы для $\gamma=24\cdot10^{-3}$. 1 — $\delta=12\cdot10^{-4}$, 2 — $\delta=6\cdot10^{-4}$, 3 — $\delta=0$

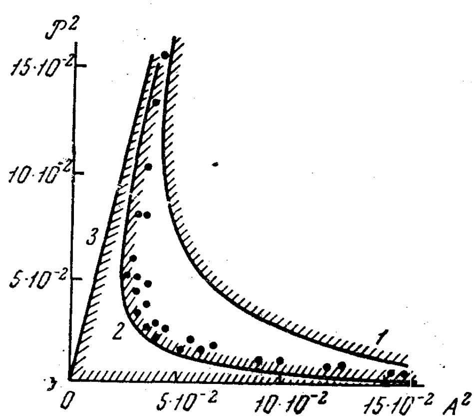

Рис. 2. Амплитуда субгармонических колебаний на границе области их существования в зависимости от амплитуды вынуждающей силы для $\gamma=24\cdot10^{-3}$. Обозначения те же, что на рис. 1

Результаты теоретического рассмотрения были экспериментально проверены на нелинейном контуре с параметрами, удовлетворяющими требованиям, налагаемым методом медленно меняющихся амплитуд. Затухание контура составляло $6\cdot10^{-4}$, а коэффициент нелинейности γ выбирался равным $24\cdot10^{-3}$ или $36\cdot10^{-3}$. На рис. 1 и 2 представлены области существования субгармонических колебаний, полученные расчетным путем. Величины, наблюдаемые при эксперименте, нанесены на этих графиках точками.

Наблюдение субгармонических колебаний в контуре с малой нелинейностью и хорошее совпадение экспериментальных результатов с расчетными позволяет считать, что колебательные процессы в нем вполне описываются уравнениями первого приближения. Можно утверждать, что величина постоянного затухания контура не играет принципиальной роли для осуществления в нем субгармонических колебаний. Поступление энергии в контур при субгармонических колебаниях происходит за счет комбинационного взаимодействия на нелинейном реактивном элементе вынуждающей силы с субгармоникой, что и позволяет путем увеличения последней компенсировать потери в контуре. Препятствием возбуждения субгармонических колебаний в контуре с реальным нелинейным элементом служит недостаточный динамический диапазон нелинейного элемента. Он не позволяет увеличить суммарную аммплитуду колебаний без существенного ее ограничения за счет диссипативного механизма ограничений колебаний.

Автор выражает благодарность проф. В. В. Мигулину за полезные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hayashi C. J. Appl. Phys., 24, 1953.
2. Либкинд М. С. «Изв. АН СССР», сер. физич., № 9, 1953.
3. Ивашев В. И., Парилис И. И. Колебания в нелинейных электрических системах. Ташкент, 1967.
4. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М., «Мир», 1968.

Поступила в редакцию
4.6 1969 г.

Кафедра
физики колебаний