

УДК 518:517.948

В. Б. ГЛАСКО, Г. Н. КРАВЦОВА, В. В. КРАВЦОВ

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ГРАВИМЕТРИИ

На основе интегрального уравнения первого рода рассматривается обратная задача гравиметрии (определение формы возмущающих масс по измерениям силы тяжести на земной поверхности). Для решения интегрального уравнения применяется метод регуляризации А. Н. Тихонова. Приведены результаты численного счета.

При разведке полезных ископаемых (в частности, рудных месторождений) часто применяются гравитационные и магнитные методы. Задача интерпретации данных гравитационных и магнитных разведок весьма схожа между собой, и в дальнейшем мы будем рассматривать гравиметрическую задачу. Гравитационная разведка состоит в том, что на поверхности Земли определяется (измеряется) с определенной точностью сила тяжести. Рудные месторождения создают аномалии силы тяжести. Задача интерпретации результатов измерений состоит в том, чтобы сделать определенные выводы о расположении и размерах залежей полезных ископаемых.

При математической обработке результатов гравитационной разведки обязательно нужно учитывать, что задача интерпретации гравитационных данных является некорректной и ошибки входной информации могут привести к большим ошибкам в выводах о расположении и размерах источников аномалий.

Интерпретация данных гравитационной разведки может быть проведена в рамках следующей геофизической модели. Пусть ниже земной поверхности Σ ($z=0$), т. е. в области $z<0$, расположено некоторое тело D с постоянной плотностью. На поверхности земли известна сила тяжести, создаваемая этим телом. Нужно восстановить (определить) по этим данным положение и форму тела. Эта задача относится к классу обратных задач и в теоретическом плане рассматривалась давно. П. С. Новиков доказал единственность решения обратной задачи теории потенциала для звездного тела [1].

В 1943 г. А. Н. Тихоновым доказана устойчивость решения обратной задачи в некотором классе функций [2]. Эти результаты гарантируют принципиальную возможность определения формы тела по достаточно точным экспериментальным измерениям его гравитационного поля.

Несмотря на то что принципиальная возможность определения формы тела по его внешнему потенциалу была выяснена сравнительно

давно, возможность фактического решения рассматриваемой обратной задачи для достаточно произвольного тела появилась только после разработки А. Н. Тихоновым устойчивого метода решения некорректно поставленных задач — метода регуляризации [3, 4]. На основе метода регуляризации проводились расчеты для контактной задачи гравиметрии [5]. В настоящей работе этот метод применяется для решения модельной двумерной задачи гравиметрии.

Сформулируем математически рассматриваемую модельную задачу. Пусть на плоскости (x, z) в области $z < 0$ расположено некоторое тело D , ограниченное замкнутым контуром s . Выберем внутри области D некоторую точку O , примем ее за начало полярных координат (ρ, φ) и зададим форму тела D полярным уравнением $\rho = h(\varphi)$. В дальнейшем будем предполагать тело звездным, относительно точки O , так что $h = h(\varphi)$ есть однозначная функция угла φ . В частности, для выпуклого тела точка O может быть совершенно произвольной внутренней точкой. Логарифмический потенциал, создаваемый телом D , определяется выражением

$$u(M) = \iint_D \ln \frac{1}{R_{Mp}} d\sigma_p, \quad (1)$$

где R_{Mp} — расстояние между точкой наблюдения M и точкой интегрирования p . Плотность тела D предполагается равной единице. Сила тяжести на поверхности земли предполагается равной

$$v(M)|_{z=0} = - \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}. \quad (2)$$

Обратная задача гравиметрии состоит в определении формы тела, т. е. функции $h(\varphi)$. Поскольку форма тела описывается в полярной системе координат с центром в некоторой точке O , положение которой априорно не задано, то вид функции $h(\varphi)$ будет зависеть от положения точки O . Поэтому нужно одновременно определять положение точки O и вид функции $h(\varphi)$.

В том случае, когда тело D является выпуклым, в качестве точки O можно выбрать произвольную внутреннюю точку области D . Удобнее всего в качестве точки O взять центр масс искомого тела, так как оказывается возможным по силе тяжести на земной поверхности определить положение центра масс, не зная формы самого тела. Поскольку положение точки O необходимо знать для определения функции $h(\varphi)$, то начнем с вопроса о нахождении центра масс тела. Одновременно будет определена и масса тела. Заметим, что существующие формулы для координат центра масс, например формулы Гамбурцева, не дают удобного алгоритма для вычисления этих величин по экспериментальным данным. В настоящей работе предлагается другой способ вычисления массы и координат центра тяжести.

Определение массы и координат центра масс тела

Выберем произвольную точку O_1 (координаты ее предполагаем в дальнейшем известными) и введем полярную систему координат с центром в точке O_1 и полярной осью, параллельной земной поверхности $z=0$ рис. 1). Пусть в этой системе точка M имеет координаты (r, φ) ,

точка $P - (\rho, \theta)$. Тогда для силы тяжести получим следующее выражение:

$$v(M) = \iint_D \frac{\rho(r \sin \varphi - \rho \sin \theta) d\sigma}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)}. \quad (3)$$

Преобразуем (ρ) , разлагая подынтегральную функцию в ряд по степеням ρ/r . Для сходимости этого ряда $\rho/r < 1$. Поскольку положение тела и его форма неизвестны, то неизвестна и величина ρ . Если точка M расположена на земной поверхности, то выполнение условия $\rho/r < 1$ можно обеспечить, располагая точку O_1 в области $z < 0$ (под землей), достаточно далеко от земной поверхности.

После преобразований получим

$$v(r, \varphi) = \iint_D \left\{ \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} (\rho/r)^n \sin(n+1)\varphi \cos n\theta - \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} (\rho/r)^n \cos(n+1)\varphi \sin n\theta \right\} d\sigma. \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$t_0 = \iint_D d\sigma, \quad (5)$$

$$t_{2k-1} = \iint_D \rho^k \cos k\theta d\sigma, \quad t_{2k} = \iint_D \rho^k \sin k\theta d\sigma$$

$$(k = 1, 2, \dots, \infty), \quad (6)$$

кроме того, t_0 есть масса тела D , а t_1/t_0 и t_2/t_0 — координаты его центра масс относительно фиксированной точки O_1 . Подставляя (5) и (6) в (4), получим

$$v(M) = v(r, \varphi) = \frac{\sin \varphi}{r} t_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\varphi}{r^{n+1}} t_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)\varphi}{r^{n+1}} t_{2n}. \quad (7)$$

Если точка M пробегает последовательность $\{M_i\}$, то (7) превращается в бесконечную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} t_j = v_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где

$$M_i = (r_i, \varphi_i), \quad v_i = v(M_i), \quad a_{i,0} = \frac{\sin \varphi_i}{r_i},$$

$$a_{i,2k-1} = \frac{\sin(k+1)\varphi_i}{r_i^{k+1}},$$

$$a_{i,2k} = -\frac{\cos(k+1)\varphi_i}{r_i^{k+1}}.$$

Система (8) решается методом усечений. Заметим, что для наших целей существенный интерес представляют только значения первых трех переменных t_0, t_1, t_2 . Для решения усеченной системы

$$\sum_{j=0}^{2n} a_{ij} t_j^{(n)} = v_i \quad (i = 0, 1, \dots, 2n)$$

применялся метод регуляризации [6], поскольку матрица системы плохо обусловлена. Значение n выбирается таким образом, чтобы при его дальнейшем увеличении значения $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}$ и $t_2^{(n)}$ не изменялись в пределах заданной точности.

Указанный алгоритм был реализован на модельной задаче, когда тело D есть круг единичного радиуса, соответственно масса тела $m = \pi$. Глубина центра тяжести относительно дневной поверхности равна 2. Ограничимся одним примером, иллюстрирующим характер результатов, получаемых по изложенному алгоритму. В этом примере смещение начала полярной системы координат O_1 относительно истинного центра масс определяется величинами $\Delta x = 1, \Delta y = 0$ (таким образом, O_1 находится на границе тела). Расчет с применением регуляризации дает $m = 3,2, \Delta x = 0,95, \Delta y = -0,1$. Расчет без регуляризации дает при минимальном $n (n=1) m = 3,6, \Delta x = 0,47, \Delta y = 0,09$, причем с увеличением порядка системы $(2n+1)$ результаты оказываются неустойчивыми; например при $n=2; m=75; \Delta x=2,7; \Delta y=3,5$; при $n=3; m=3000; \Delta x=-2,4; \Delta y=3,9$. Заметим, что с применением регуляризации получаются устойчивые с увеличением n результаты, причем их точность достаточна для решения последующей задачи об определении формы.

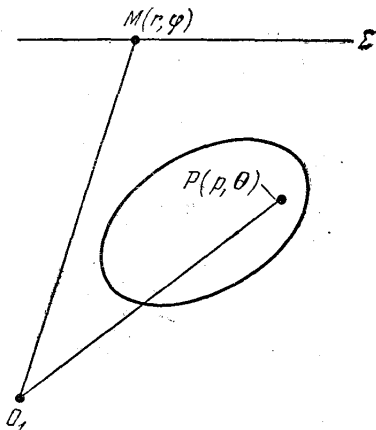


Рис. 1

Определение формы тела

Определив положение центра тяжести, можно переходить к определению формы возмущающего тела. Будем предполагать, что возмущающее тело D звездно относительно своего центра тяжести (точки O). Введем полярную систему координат с центром в точке O . Тогда форма тела D описывается уравнением $\rho = h(\theta)$.

Выражение (3) можно преобразовать, проинтегрировав по ρ (при этом предполагается, что точка O_1 совпадает с точкой O). Эта операция позволяет получить следующее нелинейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода для определения неизвестной функции $h(\theta)$:

$$A[\varphi, h(\theta)] = \int_0^{2\pi} K[\varphi, \theta, h(\theta)] d\theta = v(r(\varphi), \varphi), \quad (9)$$

где

$$K[\varphi, \theta, h(\theta)] = -h \sin \theta - \frac{r}{2} \sin(2\theta - \varphi) \ln(1 - 2h/r \cos(\theta - \varphi) + h^2/r^2) - \\ - r \cos(2\theta - \varphi) \operatorname{arctg} \frac{h \sin(\theta - \varphi)}{r - h \cos(\theta - \varphi)},$$

$h = h(\theta)$, (r, φ) — координаты точки M на поверхности земли, $v(r, \varphi)$ — сила тяжести на поверхности земли.

Правая часть уравнения (9), т. е. функция $v(r, \varphi)$, измеряется экспериментально, и ошибки при ее измерении неизбежны. Уравнение (9) есть уравнение 1-го рода; и малые ошибки в правой части могут привести к большим ошибкам в решении. Поэтому для решения этого уравнения нужно также применять метод регуляризации.

Дополнительные трудности возникают в связи с тем, что уравнение (9) нелинейное. Для решения этого уравнения применим алгоритм, разработанный для решения контактных задач [5]. Этот алгоритм состоит в следующем.

Пусть $\hat{h}(\theta)$ — некоторая дважды дифференцируемая функция, достаточно близкая к решению уравнения (9) и удовлетворяющая условиям $\hat{h}(0) = \hat{h}(2\pi)$. Эти условия соответствуют тому, что область D ограничена замкнутой поверхностью. Линеаризуем уравнение (9) в окрестности функции $\hat{h}(\theta)$. Тогда получим линейное уравнение

$$\widehat{A}[\varphi, h] = \int_0^{2\pi} K_h'[\varphi, \theta, \hat{h}(\theta)] h(\theta) d\theta = \widehat{w}(\varphi), \quad (10)$$

где

$$\widehat{w}(\varphi) = v(\varphi) + \int_0^{2\pi} \{K_h'[\varphi, \theta, \hat{h}(\theta)] \hat{h}(\theta) - K[\varphi, \theta, \hat{h}(\theta)]\} d\theta.$$

Теперь для уравнения (10) строим сглаживающий функционал:

$$\widehat{M}_\alpha[h] \equiv \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{\widehat{A}[\varphi, h] - \widehat{w}(\varphi)\}^2 d\varphi + \alpha \int_0^{2\pi} h'^2(\theta) d\theta \quad (11)$$

и уравнение Эйлера для этого функционала:

$$\widehat{L}_\alpha[h] = \int_0^{2\pi} \widehat{K}[\theta, \theta'] h(\theta) d\theta - \alpha h''(\theta) = b[\theta, \hat{h}(\theta')], \quad (12)$$

$$\widehat{K}[\theta, \theta'] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_h'[\varphi, \theta, h(\theta)] K_h'[\varphi, \theta', \hat{h}(\theta')] d\varphi, \quad (13)$$

где

$$\widehat{b}[\theta', h(\theta')] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K_h'[\varphi, \theta', \hat{h}(\theta')] \widehat{w}(\varphi) d\varphi. \quad (14)$$

Уравнение Эйлера (12) следует решать с граничным условием

$$h(0) = h(2\pi). \quad (15)$$

Пусть B^α есть обратный оператор для $\widehat{L}_\alpha[h]$, т. е. функция $h(\theta) = B^\alpha[\widehat{b}[\theta', \hat{h}(\theta)]]$ есть решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям (15). Рассмотрим последовательность

$$h_{s+1}^\alpha = B^\alpha[\widehat{b}(\theta, h_s^\alpha)], \quad (16)$$

построенную по некоторому начальному приближению

$$h^\alpha(\theta) = h_0^\alpha(\theta).$$

Если последовательность h^α равномерно сходится к некоторой функции ($h^\alpha(\theta)$ при $s \rightarrow \infty$, то $h^\alpha(\theta)$ является решением уравнения (9). Нужное значение α однозначно определяется уровнем ошибок входной информации (см. [5]). Этот алгоритм удобно использовать для построения приближенного решения уравнения (9).

На основе указанного алгоритма были проведены методические расчеты для модельной задачи: тело D есть круг. Численные эксперименты проводились для выяснения влияния начального приближения и случайных ошибок входной информации (функции $v(\varphi)$). Расчеты проводились для различных начальных приближений и показали незначи-

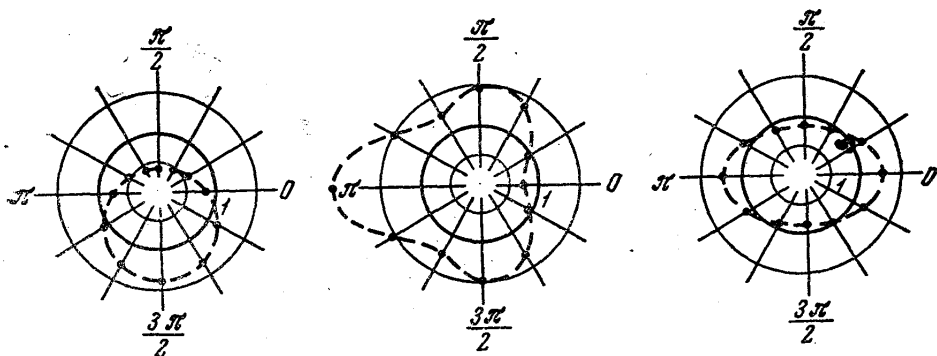


Рис. 2

тельное влияние выбора начального приближения на скорость сходимости процесса. На рис. 2 изображены некоторые начальные приближения, для которых проводились расчеты, и точное решение. (На рис. 2 прямая линия показывает точное решение, пунктирная — начальное приближение.)

Для выяснения влияния ошибок в задании входной информации в функцию $v(\varphi)$ вносилась случайная ошибка вида $v(\varphi) = v_0(\varphi) + \lambda \xi$, где $v_0(\varphi)$ — точное значение силы тяжести на дневной поверхности, ξ — случайная величина, равномерно распределенная на $(-1, +1)$. Величина λ позволяет контролировать уровень помех. Расчеты показали, что алгоритм устойчив по отношению к случайным ошибкам, вплоть до 30% ($\lambda = 0,5$) по отношению к k_{\max} входной функции.

Таким образом, численные эксперименты показали, что алгоритм, используемый для решения контактных задач, при разумном обобщении применим для более широкого класса обратных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков П. С. ДАН СССР, 18, № 3, 165, 1938.
2. Тихонов А. Н. ДАН СССР, 39, 195—198, 1943.
3. Тихонов А. Н. ДАН СССР, 151, 501—504, 1963.
4. Тихонов А. Н. ДАН СССР, 153, 42—52, 1963.
5. Тихонов А. Н., Гласко В. Б. «Вычислительная математика и математическая физика», 5, № 3, 1965.
6. Тихонов А. Н. ДАН СССР, 5, 591, 1965.

Поступила в редакцию
2.6 1969 г.

Кафедра
математики