Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1970

УДК 621.391.81

В. Д. ГУСЕВ, Л. И. ПРИХОДЬКО

РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ СРЕДЫ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Рассмотрена задача рассеяния электромагнитных волн на слабых неоднородностях среды, средняя диэлектрическая проницательность которой изменяется по линейному закону $\varepsilon(z) = 1 - \frac{z}{z_1}$.

Проблеме распространения электромагнитных волн в средах со случайными неоднородностями посвящено значительное количество работ, в которых исследуются как статистические характеристики рассеянного поля, так и влияние рассеянного поля на характеристики среднего (регулярного) поля. Особый интерес из них представляют те, в которых совместно рассматриваются хаотические неоднородности среды и регулярное изменение диэлектрической проницаемости (например, [1, 2, 3]). Однако в большинстве этих работ исследуется нормальное падение плоской волны на неоднородный рассеивающий слой. В данной работе рассматривается рассеяние на слабых неоднородностях среды при значительном изменении среднего значения диэлектрической проницаемости и изучаются статистические характеристики отраженного рассеянного поля при наклонном падении волны на слой. Примером такой задачи является наклонное зондирование неоднородного ионосферного слоя и исследование регулярных и статистических характеристик отраженного поля при различных углах падения волны на слой.

Рассмотрим задачу о наклонном падении плоской скалярной монохроматической волны на плоский полубесконечный слой ($z=0$ — начало слоя), диэлектрическая проницаемость которого имеет вид $\varepsilon = \bar{\varepsilon}(z) + \mu(x, y, z)$, где $\bar{\varepsilon}(z)$ — средняя диэлектрическая проницаемость, а μ — флуктуационная часть, случайная функция координат, причем флуктуации предполагаются, малыми, т. е. $\sqrt{\overline{\mu^2}} \ll 1$ и $\bar{\mu} = 0$.

Полное поле в среде должно удовлетворять уравнению Гельмгольца:

$$\nabla E + k^2 \varepsilon E = 0. \tag{1}$$

Представив полное поле E в виде суммы среднего (регулярного) поля $\overline{E}$ и рассеянного поля ξ, получим систему уравнений

$$\nabla^2\overline{E} + k^2\overline{\varepsilon}\,\overline{E} = -k^2\overline{\mu\xi},$$

$$\nabla\xi + k^2\overline{\varepsilon}\xi = -k^2(\mu\overline{E} + \mu\xi - \overline{\mu\xi}). \qquad (2)$$

Решая эту систему методом последовательных итераций и считая малым параметром величину μ, получим для первого приближения среднего поля $\overline{E}_1$ и однократно рассеянного поля ξ_1 систему уравнений

$$\begin{aligned} \nabla^2\overline{E}_1 + k^2\overline{\varepsilon}\,\overline{E}_1 &= -k^2\overline{\mu\xi_1}, \\ \nabla\xi_1 + k^2\overline{\varepsilon}\xi_1 &= -k^2\mu E_0, \end{aligned} \qquad (3)$$

где E_0 — невозмущенное поле, т. е. поле при отсутствии флуктуаций μ. (В дальнейшем индекс у $\overline{E}_1$ и ξ_1 опускаем.) Уравнение для ξ есть неоднородное уравнение с заданным распределением источников. Для решения его представим случайные функции ξ и μE_0 в виде интегралов Фурье по переменным x и y:

$$\xi_\varkappa = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x+\beta y)}\xi\,dx\,dy,$$

$$(\mu E_0)_\varkappa = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x+\beta y)}\mu E_0\,dx\,dy. \qquad (4)$$

Рассмотрим неоднородный слой, средняя диэлектрическая проницаемость которого изменяется по линейному закону, т. е. $\overline{\varepsilon}(z) = 1 - \frac{z}{z_1}$. Тогда общее решение для фурье-компонента рассеянного поля ξ имеет вид

$$\xi_\varkappa = A_1 v(b^{2/3}t_1) + B_1 u(b^{2/3}t_1) + b^{4/3} v(b^{2/3}t_1)\int\limits_{t_{01}}^{t_1} u(b^{2/3}\overline{t}_1)(\mu E_0)_\varkappa\,d\overline{t}_1 -$$

$$- b^{4/3} u(b^{2/3}t_1)\int\limits_{t_{01}}^{t_1} v(b^{2/3}\overline{t}_1)(\mu E_0)_\varkappa\,d\overline{t}_1, \qquad (5)$$

здесь u и v — функции Эйри, $b = kz_1$,

$$t_1 = \frac{z}{z_1} - \left(1 - \frac{\varkappa^2}{k^2}\right),\quad t_{01} = t_1|_{z=0};\quad \varkappa^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Постоянные A_1 и B_1 найдем из граничных условий. Поскольку при $z \to \infty$ $\xi_\varkappa \to 0$, то должны положить

$$B_1 = b^{4/3}\int\limits_{t_{01}}^{\infty} v(b^{2/3}t_1)(\mu E_0)_\varkappa\,dt_1.$$

Постоянная A_1 выбирается таким образом, чтобы на границе слоя $(z=0)$ $\xi_\varkappa$ переходило в рассеянную бегущую волну. Тогда

$$A_1 = -B_1\frac{b^{-1/3}u'(b^{2/3}t_{01}) - i\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{k^2}}\,u(b^{2/3}t_{01})}{b^{-1/3}v'(b^{2/3}t_{01}) - i\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{k^2}}\,v(b^{2/3}t_{01})} = -B_1 A_1(\varkappa).$$

Пусть на границу неоднородного слоя падает плоская волна единичной амплитуды $e^{-ik\sin\theta_0 x - ik\cos\theta_0 z}$. Тогда из решения граничной задачи для невозмущенного поля E_0 получаем

$$E_0 = Av(b^{2/3}t)\, e^{-ik\sin\theta_0 x},$$

здесь

$$A = \frac{2}{v(-b^{2/3}\cos^2\theta_0) + i\dfrac{b^{-1/3}}{\cos\theta_0} v'(-b^{2/3}\cos^2\theta_0)}, \qquad t = \frac{z}{z_1} - \cos^2\theta_0.$$

Умножив (5) на $(^1/_4\pi^2)e^{-i\alpha x - i\beta y}$ и проинтегрировав по α, β от $-\infty$ до $+\infty$, получим выражение для рассеянного поля в виде

$$\xi(x, y, z) = \frac{b^{4/3}}{4\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x - i\beta y} \Big\{ [u(b^{2/3}t_1) - A_1(\varkappa)v(b^{2/3}t_1)] \times$$

$$\times \int\limits_{t_{01}}^{\infty} v(b^{2/3}t_1)(\mu E_0)_\varkappa\, dt_1 + v(b^{2/3}t_1) \int\limits_{t_{01}}^{t_1} u(b^{2/3}\bar{t}_1)(\mu E_0)_\varkappa\, d\bar{t}_1 -$$

$$- u(b^{2/3}t_1) \int\limits_{t_{01}}^{t_1} v(b^{2/3}\bar{t}_1)(\mu E_0)_\varkappa\, d\bar{t}_1 \Big\}\, d\alpha\, d\beta. \qquad (6)$$

Чтобы решить неоднородное уравнение для среднего поля (3), нужно найти $\overline{\mu\xi}$. Будем считать, что статистические свойства рассматриваемого неоднородного слоя однородны по пространству, т. е. функция корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости зависит только от разности координат, причем μ зависит от x и y (а не зависит от z). При этом если считать функцию корреляции гауссовой, то

$$\rho_\mu = \overline{\mu^2} e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2 + (\bar{y}-y)^2}{l^2}},$$

где $\overline{\mu^2}$ — средний квадрат флуктуаций диэлектрической проницаемости, l — радиус корреляции или масштаб случайных неоднородностей. Для нахождения $\overline{\mu\xi}$ умножим (6) на μ, усредним это произведение, проинтегрируем полученное выражение по $\bar{x}$, $\bar{y}$, затем проинтегрируем по $\bar{t}_1$, учитывая что неопределенные интегралы от произведений двух функций Эйри равны

$$\int v(x)v(x+m)\,dx = m^{-1}[v(x)v'(x+m) - v'(x)v(x+m)],$$

$$\int v^2(x)\,dx = xv^2(x) - v'^2(x).$$

Далее от переменных α, β перейдем к переменным $\varkappa$, φ ($\alpha = \varkappa\cos\varphi$, $\beta = \varkappa\sin\varphi$) и, проинтегрировав по φ, получим для $\overline{\mu\xi}$:

$$\overline{\mu\xi} = \frac{k^2 l^2 \overline{\mu^2}}{2} A e^{-ik\sin\theta_0 x} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\frac{l^2}{4}(\varkappa^2 + k^2\sin^2\theta_0)} I_0\left(\dfrac{l^2}{2} k\sin\theta_0 \varkappa\right)\varkappa}{\varkappa^2 - k^2\sin^2\theta_0} \times$$

$$\times \{v(b^{2/3}t) - A_1(\varkappa)v(b^{2/3}t_1)[v(b^{2/3}t_{01})v'(b^{2/3}t_0) - v(b^{2/3}t_0)v'(b^{2/3}t_{01})] -$$

$$- v(b^{2/3}t_1)[v(b^{2/3}t_0)u'(b^{2/3}t_{01}) - u(b^{2/3}t_{01})v'(b^{2/3}t_0)]\}\, d\varkappa, \qquad (7)$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя.

Используя полученное выражение для $\overline{\mu\xi}$, можно найти $\overline{E}$. При этом коэффициент отражения среднего поля имеет вид

$$\overline{R}_1 = \frac{v(b^{2/3}t_0) - i\dfrac{b^{-1/3}}{\cos\theta_0}v'(b^{2/3}t_0) - i\dfrac{b}{\cos\theta_0}\displaystyle\int_{t_0}^{\infty} v(b^{2/3}t)\,\overline{\mu\xi}\,dt}{v(b^{2/3}t_0) + i\dfrac{b^{-1/3}}{\cos\theta_0}v'(b^{2/3}t_0)}. \tag{8}$$

Видно, что рассеянные волны изменяют амплитуду и фазу среднего поля. Если представить $\overline{R}_1$ в виде

$$\overline{R}_1 = R_0[1 + i\Phi(\theta_0)],$$

где R_0 — коэффициент отражения невозмущенного поля, то $I_m\Phi(\theta_0)$ определяет затухание среднего поля, связанное с рассеянием, а $\mathrm{Re}\Phi(\theta_0)$ характеризует изменение фазы. Количественная оценка эффекта затухания среднего поля для слоя с регулярным изменением диэлектрической проницаемости по закону $\overline{\varepsilon}(z) = \overline{e}^{-bz}$ была приведена в работе [4].

Таким образом, отраженное поле в свободном пространстве в первом приближении метода последовательных итераций имеет вид

$$E = \overline{E} + \xi = \overline{R}_1 e^{-ik\sin\theta_0 x + ik\cos\theta_0 z} + \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x - i\beta y + i\sqrt{k^2-\varkappa^2}z}\xi_\varkappa\,d\alpha\,d\beta, \tag{9}$$

где

$$\xi_\varkappa = b^{4/3}\left[u(b^{2/3}t_{01}) - A_1(\varkappa)v(b^{2/3}t_{01})\right]\int_{t_{01}}^{\infty} v(b^{2/3}t_1)(\mu E_0)_\varkappa\,dt_1$$

угловой спектр рассеянного поля.

Полученное выражение для поля позволяет найти зависимость $\beta^2 = |\overline{R}_1|^2/\overline{|\xi|^2}$ отношения энергии среднего поля к средней энергии рассеянного поля как функцию угла падения θ_0. На основании закона сохранения энергии на выходе из слоя имеем $|\overline{R}_1|^2 + \overline{|\xi|^2} = |R_0|^2$, т. е. сумма энергии среднего и рассеянного поля равна энергии невозмущенного поля. Поскольку $|R_0| = 1$, то выражение для β^2 можно записать так:

$$\beta^2 = \frac{1 - \overline{|\xi|^2}}{\overline{|\xi|^2}}. \tag{10}$$

Средний квадрат напряженности рассеянного поля можно найти, например, зная средний угловой энергетический спектр рассеянного поля $F(\alpha, \beta)$ и используя теорему Винера—Хинчина. Тогда

$$\overline{|\xi|^2_{z=0}} = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta)\,d\alpha\,d\beta, \tag{11}$$

причем

$$\overline{\xi_\varkappa \xi^*_{\varkappa_1}} = F(\alpha, \beta)\,\delta(\alpha - \alpha_1)\,\delta(\beta - \beta_1),$$

где

$$F(\alpha, \beta) = \pi l^2 k^4 \overline{\mu^2}(AA^*)\frac{e^{-\frac{l^2}{4}[(\alpha - k\sin\theta_0)^2 + \beta^2]}}{(\varkappa^2 - k^2\sin^2\theta_0)^2}\left[u(b^{2/3}t_{01}) - A_1(\varkappa)v(b^{2/3}t_{01})\right] \times$$

$$\times\left[u(b^{2/3}t_{01}) - A_1^*(\varkappa)v(b^{2/3}t_{01})\right]\left[v(b^{2/3}t_{01})v'(b^{2/3}t_0) - v(b^{2/3}t_0)v'(b^{2/3}t_{01})\right]^2. \tag{12}$$

Если в (11) перейти к полярным координатам $\varkappa$ и φ и проинтегрировать по φ, то

$$\overline{|\xi|^2_{z=0}}\ \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty F(\varkappa)\,d\varkappa, \tag{13}$$

здесь

$$F(\varkappa)=\frac{l^2k^4\overline{\mu^2}(AA^*)}{2}\,\frac{e^{-\frac{l^2}{4}(\varkappa^2+k^2\sin^2\theta_0)}I_0\left(\frac{l^2}{2}k\sin\theta_0\varkappa\right)\varkappa}{(\varkappa^2-k^2\sin^2\theta_0)^2}\,[u(b^{2/3}t_{01})-$$

$$-A_1(\varkappa)v(b^{2/3}t_{01})]\,[u(b^{2/3}t_{01})-A_1^*(\varkappa)v(b^{2/3}t_{01})]\,[v(b^{2/3}t_{01})v'(b^{2/3}t_0)-$$

$$-v(b^{2/3}t_0)v'(b^{2/3}t_{01})]^2. \tag{14}$$

Сделаем в (13) замену переменных $\varkappa_1=\varkappa-k\sin\theta_0$. Будем считать далее, что угол рассеяния мал (что соответствует экспериментальным данным по исследованию отражения электромагнитных волн от ионосферы). Тогда существенной областью интегрирования по $\varkappa_1$ будет область $|\Delta|\leqslant\frac{2}{l}$, которая характеризует угол рассеяния волн. Для углов падения, удовлетворяющих условиям

$$\sin\theta_0\gg\frac{2}{kl}\quad\text{и}\quad\cos\theta_0\gg\frac{1}{(kz_1)^{1/3}}, \tag{15}$$

можно упростить (14), заменив $I_0\left(\frac{l^2}{2}k\sin\theta_0\varkappa\right)$, а также функции Эйри и их производные асимптотическими выражениями [5]. Тогда вместо (13) получим

$$\overline{|\xi|^2_{z=0}}\approx\frac{lk^2}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{\overline{\mu^2}}{\sin^2\theta_0}\int\limits_{-\Delta}^{\Delta}\frac{e^{-\frac{l^2}{4}\varkappa_1^2}}{\varkappa_1^2}\sin^2(z_1\sin 2\theta_0\varkappa_1)\,d\varkappa_1. \tag{16}$$

Приближенное вычисление этого интеграла с точностью до членов порядка l/z_1 приводит к следующему выражению для средней энергии однократно рассеянного поля

$$\overline{|\xi|^2_{z=0}}\approx\frac{\sqrt{\pi}}{2}k^2lz_1\overline{\mu^2}\operatorname{ctg}\theta_0. \tag{17}$$

Используя (17), построим зависимость β^2 от угла падения θ_0. Такая зависимость представлена на рис. 1 для следующих параметров ионосферного слоя: $\sqrt{\overline{\mu^2}}=10^{-4}$, $z_1=100$ *км*, $l=2$ *км*, $\lambda=60$ *м*. С ростом угла падения β^2 возрастает. Такой ход кривой $\beta^2(\theta_0)$ довольно естествен, поскольку рассеяние на выходе из слоя — эффект интегральный, а с ростом угла падения уменьшается толщина рассеивающего слоя, отсчитываемая от начала слоя до области отражения z_0 (для линейного слоя $z_0=z_1\cos^2\theta_0$).

Рассмотрим средний угловой энергетический спектр однократно рассеянного поля. При сделанных предположениях (15), $F(\theta)$, где $\sin\theta=\frac{\varkappa}{k}$, имеет вид

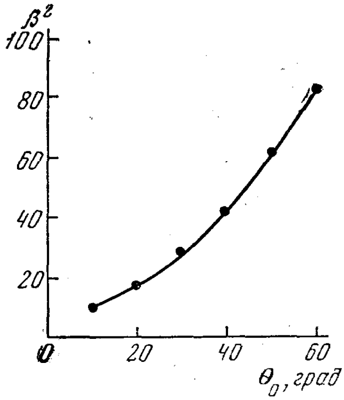
$$F(\theta)=\frac{2\pi^{3/2}}{\sin^2\theta_0}\,\frac{\overline{\mu^2}l}{\cos\theta_0}\,\frac{e^{-\frac{k^2l^2\cos^2\theta_0}{4}(\Delta\theta)^2}}{(\Delta\theta)^2}\sin^2(2kz_0\sin\theta_0\Delta\theta), \tag{18}$$

где $\Delta\theta=\theta-\theta_0$.

Если рассматриваемый неоднородный слой тонкий, а неоднородности достаточно крупные, т. е. $2z_0\sin\theta_0 \ll l$, то угловая ширина спектра в плоскости x, y определяется шириной экспоненты и равна $\frac{2}{kl\cos\theta_0}$. В этом случае поперечная функция корреляции рассеянного комплексного поля, которая получается путем Фурье-преобразования среднего энергетического спектра $F(\varkappa)$ имеет радиус корреляции порядка $l\cos\theta_0$. Если же слой достаточно толстый, т. е. $2z_0\sin\theta_0 \gg l$ (этот случай рассматривался при вычислении β^2), то угловой спектр — произведение быстро осциллирующей функции на медленно меняющуюся. Быстрые осцилляции множителя $\sin^2(2kz_0\sin\theta_0\Delta\theta)/\Delta\theta)^2$ с периодом по $\Delta\theta$ порядка $\lambda/z_0\sin\theta_0$ вписаны в огибающую, даваемую экспонентой, спадающей в e раз на угловом расстоянии порядка $\frac{1}{kl\cos\theta_0} \gg \frac{1}{kz_0\sin\theta_0}$

Определим среднеквадратичную ширину полосы энергетического спектра по формуле

$$\Delta_\varkappa^2 = \frac{\int\limits_0^\infty (\varkappa - k\sin\theta_0)^2 F(\varkappa)\, d\varkappa}{\int\limits_0^\infty F(\varkappa)\, d\varkappa}. \qquad (19)$$



Зависимость параметра мутности β^2 от угла падения θ_0

Тогда при сделанных предположениях угловая ширина спектра

$$\Delta_\theta = k^{-1}\Delta_\varkappa \sim \frac{1}{k\sqrt{lz_1\sin 2\theta_0}}.$$

При нормальном падении волны на слой угловой спектр (12) — функция, симметричная относительно α и β, — и среднее направление энергетического спектра совпадают с осью z. При наклонном падении волны на неоднородный рассеивающий слой угловой спектр $F(\alpha, \beta)$ симметричен относительно β и несимметричен относительно α. Несимметрию спектра запишем

$$p_x^* = \frac{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} (\alpha - k\sin\theta_0)\, F(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}, \qquad (20)$$

которая характеризует отклонение среднего направления энергетического спектра рассеянного поля ξ от $k\sin\theta_0$. Оценка $|p_x^*|$ при сделанных предположениях дает величину порядка $1/l^2k\sin\theta_0$. Асимметрия углового спектра рассеяния в плоскости распространения может иметь существенное значение при исследовании флуктуаций направления распространения рассеянных волн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денисов Н. Г. «Изв. вузов», радиофизика, 3, 208, 1960.
2. Кравцов Ю. А. «Изв. вузов», радиофизика, 5, 876, 1965.
3. Борисов В. В., Красильников В. Н. Сб. «Проблемы дифракции и распространения волн», вып. 2. Изд-во ЛГУ, 1962, стр. 102.
4. Приходько Л. И. «Вестн. Моск. ун-та», № 3, 72, 1968.
5. Фок В. А. Таблицы функций Эйри. М., ИЛ, 1946.

Поступила в редакцию
9.7 1969 г.

Кафедра
волновых процессов