Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 2 — 1970

УДК 531.19

П. Б. ПОДОСЕНОВ

О КОВАРИАНТНЫХ СТЕПЕННОЙ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Получены два стационарных решения общековариантного уравнения непрерывности для функции распределения $f(x^\alpha u^\alpha)$ ($\alpha=0, 1, 2, 3$). Степенной закон распределения применяется в случае космических лучей, экспоненциальный — в случае статического распределения звезд по скоростям.

По крайней мере, для двух случаев стационарных статистических распределений частиц необходимо введение общековариантного способа описания. Это, во-первых, распределение звезд по скоростям в галактиках, которые, как показывают наблюдения, близки к максвелловскому распределению. В этом случае космически протяженных образований роль возникающей кривизны пространства — времени в установлении стационарного распределения частиц должна быть исследована. Вторым объектом является стационарное изотропное распределение космических лучей по энергиям, также требующее анализа роли в установлении этого распределения римановой метрики пространства — времени.

Таким образом, в обоих случаях возникают следующие вопросы.

Какое влияние на закон распределения частиц оказывает наличие 8-мерного пространства, которое является необходимым, согласно работе [1], для ковариантной формулировки законов сохранения. В особенности это относится к распределениям, в которые входит новая степень свободы, связывающая собственное и лабораторное время [1].

Какое влияние на стационарное распределение частиц оказывает наличие кривизны пространства — времени. За исходные уравнения мы примем уравнения из работы [1]

$$\widetilde{\mathrm{Div}}_r uf + \mathrm{div}_u \left\langle \frac{\widetilde{D}u}{d\tau} \right\rangle f = 0,$$

$$\left(\widetilde{\mathrm{Div}}_r uf = u^\alpha \widetilde{D}_\alpha f + f\widetilde{D}_\alpha u^\alpha, \quad D_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial f}{\partial u^\sigma} \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} u^\nu\right). \tag{1}$$

Здесь $f(x^\alpha, u^\alpha)$ ($\alpha=0, 1, 2, 3$) — функция распределения, зависящая от координат x^α и скоростей u^α четырехмерного пространства времени, $\left\langle \frac{\widetilde{D}u}{d\tau} \right\rangle$ — средние величины ускорений, которые должны быть заданы извне. В соответствии с работой [2] и по тем же причинам правую часть уравнения [1] мы полагаем равной нулю, т. е. не рассматриваем интегралов столкновений.

В настоящей работе получены два решения уравнения [1].

а. В условиях стационарности по отношению к лабораторному (но не собственному) времени:

$$\frac{\partial f}{\partial x^0}=\frac{\partial g\alpha\beta}{\partial x^0}=0,\quad g_{0i}=g^{0i}\ (i=1,2,3).$$

б. При отсутствии сил $\left\langle\frac{\widetilde{D}u}{d\tau}\right\rangle=0$,

в. При изотропности в пространстве скоростей.

г. При статистической независимости по отношению к определенным величинам.

Из условий стационарности и выражений

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\gamma}}+\frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\sigma}}\right),\quad g^{\alpha\sigma}g_{\beta v}=\delta^{\alpha}_{\beta}$$

следует, что

$$\Gamma^0_{00}=\Gamma^0_{ik}=\Gamma^k_{i0}=0,\quad \Gamma^0_{0i}=\frac{1}{2g_{00}}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i},\quad \Gamma^i_{i0}=-\frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k},\quad g_{00}g_{00}=1.$$

Подставляя эти величины в уравнение $\mathrm{Div}_r uf=0$, получим

$$u^i\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}-\frac{\partial\ln(-g_{00})}{\partial x^i}u^0\frac{\partial f}{\partial u^0}\right)-\left(\Gamma^i_{kl}u^ku^l+\frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial(-g_{00})}{\partial x^k}(u^0)^2\right)\frac{\partial f}{\partial u^i}=0. \tag{2}$$

Перейдем к функции распределения, изотропно зависящей от скоростей, согласно условию (в)

$$f(x^i,u^i,u^0)\to f(x^i,u^2,u^0)\quad (u^2=g_{ik}u^iu^k).$$

При этом надо учесть:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}=\frac{\partial f}{\partial x^i}+\frac{\partial f}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial x^i},\quad \frac{\partial f}{\partial u^i}=\frac{\partial f}{\partial u^2}\frac{\partial u^2}{\partial u^i},\quad \frac{\partial u^2}{\partial u^i}=2g_{im}u^m,$$

$$u^i\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}u^uu^l=\Gamma^i_{kl}u^ku^l\frac{\partial f}{\partial u^2}2g_{im}u^m,$$

$$u^i\frac{\partial f}{\partial u^2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}u^ku^l=\Gamma^i_{k}{}_lu^ku^l\frac{\partial f}{\partial u^2}2g_{lm}u^m,$$

$$-\frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial u^i}=-\delta^k_m\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k}\frac{\partial f}{\partial u^2}(u^0)^2u^m=\frac{\partial(-g_{00})}{\partial x^i}u^i(u^0)^2\frac{\partial f}{\partial u^2}.$$

Уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}-\frac{\partial\ln(-g_{00})}{\partial x^i}u^0\frac{\partial f}{\partial u^0}-\frac{\partial(-g_{00})}{\partial x^i}(u^0)^2\frac{\partial f}{\partial u^2}=0. \tag{3}$$

Следуя А. А. Власову [1], мы считаем, что существует статистическая независимость в показаниях часов собственного и лабораторного времени, и потому выступающая в уравнении (3) новая степень свободы $u^0=\frac{dx^0}{d\tau}=\frac{dct}{dt}$ должна быть случайной величиной, независимой от u^2 и x^i. Так как в уравнении (3) переменные не разделяются, то нельзя применить принцип максимальной статистической независимости. Поэтому ищем решение уравнения (3), считая сначала статистически независимыми компоненты 4-вектора скорости

$$f(x^i, u^2, u^0) = \Phi_1 [\varphi(x^i)(u^0)^2] \Phi_2(u^2). \tag{4}$$

Подставляя это в уравнение (3) и деля его на $f = \Phi_1\Phi_2$, получим

$$(u^0)^2 \left\{ \frac{\partial \ln \Phi_1}{\partial \chi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{2\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i} \varphi(x^i) \right] - \frac{\partial(-g_{00})}{\partial x^i} \frac{\ln \Phi_2}{\partial x^2} \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln \Phi_1}{\partial \chi} \left[\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \dfrac{2\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i} \varphi(x^i)}{\dfrac{\partial(-g_{00})}{\partial x^i}} \right] = \frac{\partial \ln \Phi_2}{\partial u^2} = -\frac{m}{2\theta} = \text{const}.$$

Безразмерная величина в квадратных скобках должна равняться постоянному числу c, так как $\dfrac{m}{2\theta} = \text{const}$, откуда получаем уравнение для определения неизвестной функции φ:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{2\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i} \varphi(x^i) = c\, \frac{\partial(-g_{00})}{\partial x^i},$$

$$\varphi(x^i) = c(-g_{00})^2 \int \frac{1}{(-g_{00})} \frac{\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i}\, dx^i.$$

Окончательно получаем следующее решение:

$$f = f_0 \exp\left\{ -\frac{m(u^0)^2}{2\theta} (-g_{00})^2 \int \frac{1}{(-g_{00})} \frac{\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i}\, dx^i \right\} \exp\left\{ -\frac{mu^2}{2\theta} \right\}, \tag{5}$$

где $f_0 = \text{const}$.

Как известно, в релятивистской механике компоненты 4-вектора скорости u^α не являются независимыми, так как существует однозначная связь между собственным и лабораторным временем

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt, \tag{6}$$

и в нашем случае статического гравитационного поля:

$$u^0 = \sqrt{\frac{u^2 + c^2}{(-g_{00})}}. \tag{7}$$

Поэтому переход от температурного статистического коллектива частиц к динамическому коллективу математически отображается особой нормировкой по u^0

$$\int_0^\infty \exp\left\{ -\frac{m(u^0)^2}{2\theta} (-g_{00})^2 \int \frac{1}{(-g_{00})} \frac{\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i}\, dx^i \right\} \delta\left(u^0 - \sqrt{\frac{u^2 + c^2}{(-g_{00})}} \right) du^0 =$$

$$= \exp\left\{ -\frac{m(u^2 + c^2)}{2\theta} (-g_{00}) \int \frac{1}{(-g_{00})} \frac{\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i}\, dx^i \right\}.$$

Окончательно получаем

$$f = f_0 \exp\left\{-\frac{mu^2}{2\theta}\left(1 + (-g_{00})\int \frac{1}{(-g_{00})} \frac{\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i} dx^i\right)\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{mc^2}{2\theta}(-g_{00})\int (-g^{00}) \frac{\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i} dx^i\right\}. \quad (8)$$

Постоянная f_0 определяется из условия нормировки на плотность числа частиц n

$$j^\alpha = m\int u^\alpha f \frac{\sqrt{-g}\, d^3u}{u_0},$$

j^α — 4-вектор тока массы.

Нулевой компонент 4-вектора j^α, умноженный на $\sqrt{-g_{00}}$, дает плотность числа частиц n. Интегрирование проводим в сферической системе координат и получаем

$$f_0 = n \exp\left\{\frac{mc^2}{2\theta}(-g_{00})\int \frac{1}{(-g_{00})} \frac{\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i} dx^i\right\} \times$$
$$\times \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2}\left(1 + (-g_{00})\int (-g^{00}) \frac{\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i} dx^i\right)^{3/2}. \quad (9)$$

В случае слабого гравитационного поля компонент метрического тензора g_{00}, согласно [3], равен $-g_{00} = -1 + \frac{2\varphi}{c^2}$, где φ — нерелятивистский потенциал гравитационного поля.

Имеем

$$(-g_{00})\int \frac{1}{(-g_{00})} \frac{\partial \ln(-g_{00})}{2x^i} dx^i = \left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right) \times$$
$$\times \int \frac{1}{\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)^2} \frac{2}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i \approx \frac{2\varphi}{c^2}.$$

Мы пренебрегли членами порядка малости выше φ/c^2.

В этом приближении распределение (8), выраженное через импульс, имеет вид

$$f = f_0 e^{-p^2/2m^x\theta} e^{-u/\theta}, \quad (10)$$

где $m^* = \frac{m^2c^2}{mc^2 + 2v_{2p}}$ — «эффективная» масса частицы, $u = m\varphi$ — потенциальная энергия частицы в гравитационном поле.

Будем искать решение уравнения (3) в таком виде:

$$f = \rho(x^i)\,\Phi\left(\frac{u^2}{(-g_{00})(u^0)^2}\right). \quad (11)$$

Подставляя в уравнение (3), имеем

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial x^i} \frac{1}{\frac{\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i}} + \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \theta}(\chi - 1) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial x^i} \frac{1}{\frac{\partial \ln(-g_{00})}{\partial x^i}} = \frac{\partial \ln \Phi}{\partial \chi}(1-\chi) = \frac{mc^2}{2\theta} = \text{const}.$$

Получаем

$$f = f_0(-g_{00})^{-mc^2/2\theta}\left(1 - \frac{u^2}{(u^0)^2(-g_{00})}\right)^{mc^2/2\theta}. \tag{12}$$

Переход к динамическому коллективу частиц осуществляем с помощью особой нормировки по u^0

$$\int_0^\infty \left(\left(1 - \frac{u^2}{(u^0)^2(-g_{00})}\right)^{mc^2/2\theta}\right)\delta\left(u^0 - \sqrt{\frac{u^2+c^2}{(-g_{00})}}\right)du^0 = \left(\frac{\varepsilon^2}{m^2c^4(-g_{00})}\right)^{-mc^2/2\theta}.$$

Окончательно получаем

$$f = f_0\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^{-mc^2/2\theta},$$

где

$$\varepsilon = \frac{mc^2\sqrt{-g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc\sqrt{-g_{00}}\sqrt{u^2+c^2}.$$

Это степенное распределение совпадает с полученным в работе [2].

Постоянная f_0 также получена в работе [2]

$$f_0 = n(-g_{00})^{mc^2/2\theta}(\pi)^{-3/2}\frac{\Gamma\left(\frac{mc^2}{2\theta}\right)}{\Gamma\left(\frac{mc^2}{2\theta} - \frac{3}{2}\right)}. \tag{13}$$

Итак, мы получили два закона распределения: экспоненциальный и степенной. Отметим некоторые их характерные особенности.

Степенной закон получается в случае статистической независимости между координатами и скоростями и отсутствия ее между компонентами скоростей u^0 и u^2.

Экспоненциальный закон получается в случае статистической независимости между компонентами скоростей u^0 и u^2 и отсутствия ее между координатами x^i и u^0. В обоих случаях переход от температурного статистического коллектива частиц к динамическому отображается особой нормировкой по u^0.

В заключение выражаю благодарностью проф. А. А. Власову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Статистические функции распределения. М., 1966.
2. Гордеев А. Н. «Астрономический журнал», 43, вып. 5, 1966.
3. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения, 1961.

Поступила в редакцию
2.6 1969 г.

Кафедра
теоретической физики