4. Suard M., Berthier G., Pullman B. BBA, 52, 254, 1964.
5. Yomoza S. J. Phys. Soc. Japan., 19, 1718, 1964.
6. Yomoza S. Biopolymers, 2, 1, 1964.
7. Cardew M. H., Eley D. D. Diss. Farad. Soc., 27, 115, 1959.
8. Eley D. D., Sprivey D. D. Nature, 188, 725, 1960.
9. Snart R. Biopolymers, 6, 73, 1968.
10. Nelson R. C. J. Chem. Phys., 39, 112, 1963.
11. Владимиров Ю. А. Фотохимия и люминесценции белков. М., «Наука», 1965.
12. Бендерский В. А. «Журнал структурной химии», 4, 415, 1963.
13. Lyons L. E. J. Chem. Soc., 5001, 1957.
14. Бендерский В. А., Блюменфельд А. А. «Журнал структурной химии», 7, 370, 1966.
15. Кукушкин А. К. Молекулярная биофизика. Тез. докладов на Всесоюзной конференции молодых ученых. Изд-во АН СССР, Пущино на Оке, 1966.
16. Цит. по Nature (Engl.), 218, 118, 1968.
17. Гурская Г. Структура аминокислот. М., «Наука», 1966.
18. Mataga N., Nishimoto K. Z. Physik. Chem. (Frankfurt), 13, 140, 1957.
19. Pople J. A. Frans. Farad. Soc., 49, 1375, 1953.

Поступила в редакцию
25.5 1969 г.

Кафедра
биофизики

УДК 530.12:531.51

В. А. БАРЫНИН

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ТРЕХМЕРНАЯ МОДИФИКАЦИЯ ТРЕХМЕРНОГО ХРОНОМЕТРИЧЕСКИ-ИНВАРИАНТНОГО ДВУХМЕТРИЧЕСКОГО ФОРМАЛИЗМА

Предложенный в предыдущей работе[1] трехмерный хронометрически инвариантный х. и. двухметрический формализм не является последовательно трехмерным, так как ковариантное дифференцирование осуществляется в нем на основе четырехмерной (хотя и не являющейся четырехмерным тензором) метрики системы отсчета.

Можно развить последовательно трехмерную модификацию этого формализма, в которой будут определены операции х. и. дифференцирования по времени и х. и. ε-ковариантного дифференцирования по пространственным координатам.

Определим х. и. ε-ковариантную трехмерную производную произвольного трехмерного х. и. вектора a^i следующим образом:

$$\nabla_k a^i = \frac{\partial^* a^i}{\partial x^k} + e^i_{kl}\, a^l, \tag{1}$$

где

$$e^i_{kl} = \frac{1}{2}\, \varepsilon^{im} \left(\frac{\partial^* \varepsilon_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial^* \varepsilon_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial^* \varepsilon_{kl}}{\partial x^m} \right). \tag{2}$$

Величины (2) ведут себя как обычные символы Кристоффеля при чисто пространственных преобразованиях координат и инварианты относительно произвольных преобразований времени, чем и оправдывается данное определение.

Построим величины:

$$\widetilde{P}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \overset{*}{g}{}^{\lambda\varepsilon} \left(\nabla_\nu \overset{*}{g}_{\varepsilon\mu} + \nabla_\mu \overset{*}{g}_{\varepsilon\nu} - \nabla_\varepsilon \overset{*}{g}_{\mu\nu}\right),$$

где ∇_k — определенная выше трехмерная х. и. ε-ковариантная производная, ∇_0 — х. и. производная по времени, т. е. $\frac{\partial^*}{\partial t}$, а g^* — х. и. аналог четырехмерного метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ (Латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, а греческие — 0, 1, 2, 3.) Несложным вычислением получаем

$$\widetilde{P}^{\lambda}_{\mu\nu} = \widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \delta^{\lambda}_{e}\, \delta^{m}_{\mu}\, \delta^{n}_{\nu}\, e^{l}_{mn},$$

[1] В. А. Барынин. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 6, 92, 1969.

где

$$\widetilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\left[\overset{*}{g}{}^{\lambda\varepsilon}\left(\frac{\partial^*\overset{*}{g}_{\varepsilon\mu}}{\partial x^{\nu}}+\frac{\partial^*\overset{*}{g}_{\varepsilon\nu}}{\partial x^{\mu}}-\frac{\partial^*\overset{*}{g}_{\mu\nu}}{\partial x^{\varepsilon}}\right.\right..$$

Роль величин $\overset{*}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$, использующихся в работе [1], будут играть величины:

$$\overset{*}{P}{}^{\lambda}_{\mu\nu}=\widetilde{P}^{\lambda}_{\mu\nu}+\widehat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}+S^{\lambda}_{\mu\nu},\tag{3}$$

где $\widehat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $S^{\lambda}_{\mu\nu}$ определяются формулами (14) работы [1] и не содержат производных от потенциалов гравитационного поля.

В отличие от $\overset{*}{\Pi}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$, $\overset{*}{P}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$ не симметричны по нижним индексам, если $S^{\lambda}_{\mu\nu}\neq 0$.

Уравнения движения частицы в гравитационном поле, записанные в полностью трехмерной х. и. форме, имеют вид

$$\frac{\nabla}{dT}(Mv^l)=-M\,[\overset{*}{P}{}^{l}_{00}+(\overset{*}{P}{}^{l}_{m0}+\overset{*}{P}{}^{l}_{0m})\,v^m+\overset{*}{P}{}^{l}_{mn}\,v^m v^n],$$

где v^l — трехмерная х. и. скорость частицы, через $\frac{\nabla}{dT}$ обозначена абсолютная трехмерная производная по инвариантному времени T, M — масса частицы в гравитационном поле, определенная в работе [1], а $\overset{*}{P}{}^{l}_{00}$, $\overset{*}{P}{}^{l}_{m0}$, $\overset{*}{P}{}^{l}_{0m}$ и $\overset{*}{P}{}^{l}_{mn}$ — х. и. трехмерные вектор и тензоры второго и третьего ранга, определенные формулой (3). Эти векторы зависят от трехмерных х. и. потенциалов гравитационного поля $\overset{*}{g}_{00}$, $\overset{*}{g}_{0k}$ и $\overset{*}{g}_{ik}$ и их х. и. производных по времени и ε-ковариантных производных по координатам, а также от пространственной и временной метрик системы отсчета.

Аналогично в полностью трехмерной х. и. форме можно записать и уравнения гравитационного поля.

С помощью несложных, но довольно длинных вычислений можно компоненты х. и. аналога четырехмерного тензора Риччи $\overset{*}{R}_{\mu\nu}$ представить в виде

$$\begin{aligned}
\overset{*}{R}_{00}&=W_{00}-4\overset{*}{P}{}^{l}_{00}S^{\alpha}_{l\alpha},\\
\overset{*}{R}_{k0}=\overset{*}{R}_{0k}&=W_{0k}+2\left(\frac{\partial^* S^{\alpha}_{k\alpha}}{\partial t}-2\overset{*}{P}{}^{l}_{0k}S^{\alpha}_{l\alpha}-\overset{*}{P}{}^{\beta}_{0\beta}S^{\alpha}_{k\alpha}\right),\\
\overset{*}{R}_{ik}&=W_{ik}+q_{ik}+2\,(\nabla_{ik}\,S^{\alpha}_{k\alpha}-\overset{*}{P}{}^{l}_{ik}S^{\alpha}_{l\alpha}-\overset{*}{P}{}^{\beta}_{0\beta}S^{0}_{ik}+\overset{*}{P}{}^{\alpha}_{0k}\,S^{0}_{i\alpha}),
\end{aligned}\tag{4}$$

где q_{ik} — х. и. трехмерный тензор Риччи для метрики ε_{ik}, а величины W_{00}, W_{0k} и W_{ik} определяются выражением

$$W_{\alpha\beta}=\nabla_{\gamma}\overset{*}{P}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}-\nabla_{\beta}\overset{*}{P}{}^{\gamma}_{\alpha\gamma}+\overset{*}{P}{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\overset{*}{P}{}^{\delta}_{\gamma\delta}-\overset{*}{P}{}^{\delta}_{\alpha\gamma}\overset{*}{P}{}^{\gamma}_{\beta\delta}.$$

В общем случае

$$W_{0k}\neq W_{k0}.$$

Таким образом, с помощью (4) уравнение гравитационного поля

$$\overset{*}{R}_{\mu\nu}=\varkappa\left(\overset{*}{T}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\overset{*}{g}_{\mu\nu}\overset{*}{T}\right)$$

может быть записано в полностью трехмерной х. и. форме.

При выборе таких пространственной и временной метрик системы отсчета, которые удовлетворяют условиям $q_{ik}=0$, $S^{\lambda}_{\mu\nu}=0$, уравнения гравитационного поля выражаются только через величины $W_{\alpha\beta}$, что соответствует выбору второй метрики в обычном двухметрическом формализме плоской.

Рассмотренная модификация трехмерного х. и. двухметрического формализма совпадает с первоначальной, если пространственная и временная метрики системы отсчета удовлетворяют условиям $S^{\lambda}_{\mu\nu}=0, \ \frac{\partial^* \varepsilon_{ik}}{\partial t}=0$.

Поступила в редакцию
28.4 1969 г.

Кафедра
теоретической физики

УДК 535.14

В. С. МИНЕЕВ, А. Р. ФРЕНКИН

ЧЕРЕНКОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНОМ ОДНООСНОМ КРИСТАЛЛЕ

Излучение Вавилова—Черенкова возникает при движении релятивистских заряженных частиц в диэлектрических средах. В теоретических исследованиях обычно рассматривается случай линейной зависимости индукции от электрического поля (см. [1]), в связи с чем интенсивность излучения не зависит от знака релятивистских частиц. Представляет несомненный интерес рассмотрение излучения Вавилова—Черенкова в нелинейных средах, свойства которых интенсивно исследуются в оптике. В таких средах излучение Вавилова — Черенкова уже будет зависеть от знака заряда частиц. Например, излучение электронов и позитронов одинаковой энергии будет различным. Это дает принципиальную возможность использования излучения Вавилова—Черенкова для регистрации знака заряженных частиц.

В настоящей работе в качестве примера рассматриваются особенности излучения Вавилова—Черенкова в одноосном нелинейном кристалле при движении частиц вдоль оптической оси. В этом случае при учете лишь частотной дисперсии связь индукции и электрического поля дается формулой

$$D_i(\omega)=\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ik}(\omega)E_k(\omega)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j,k=1}^{3}\int d\omega'\alpha_{ijk}(\omega,\omega')E_j(\omega-\omega')E_k(\omega'), \tag{1}$$

где $D_i(\omega)$, $E_i(\omega)$, $\alpha_i(\omega)$ — фурье-компоненты соответствующих величин, определенные как

$$E_i(r,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\omega t}E_i(\vec{r},\omega)\,d\omega.$$

Кроме того, тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ik}(\omega)$ диагонален в системе, где ось z направлена вдоль оптической оси кристалла, а оси x и y выбраны произвольно, причем

$$\varepsilon_x(\omega)=\varepsilon_y(\omega)=\varepsilon_\rho(\omega), \quad \varepsilon_2(\omega)\neq\varepsilon_\rho(\omega).$$

Уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\vec{D}=4\pi\rho, \quad \operatorname{div}\vec{H}=0,$$

где

$$\rho=e\delta(\vec{r}-\vec{v}t), \quad j=\rho\vec{v}, \quad \mu=1.$$

Для вычисления величин электрического и магнитного полей удобно перейти к фурье-компонентам:

$$E_i(r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}E_i(\vec{k})\,d^3k,$$

причем $\omega=k_3v$, $E_i(\vec{k})=E_i(k_1, k_2, \omega/v)$.