ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1970

УДК 538.3 : 853.1

ПАК КВАН ИР

ТЕПЛОВАЯ ФЛУКТУАЦИЯ АМПЛИТУДЫ ВОЛН ПОВЕРХНОСТНЫХ ЗАРЯДОВ В ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ ПЛАЗМЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассматривается вопрос о тепловой флуктуации амплитуды волн поверхностных зарядов в частично заполненном плазменном волноводе круглого сечения. Получено дисперсионное уравнение для волн поверхностных зарядов.

В исходную систему войдут следующие линеаризованные уравнения для потенциалов: $\nabla^2 V=0$, $\nabla^2 U=0$, $\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{q_0^-}{\rho_0}U=0$,

где $q_0^-=-eN_0^-$ есть плотность заряда электронной жидкости (N_0^- — концентрация свободных электронов в плазме).

Квазинейтральность плазмы привела к тому, что внутри несжимаемой плазмы источник заряда отсутствует. Зато на ее поверхности за счет частичного выхода свободных электронов через границу образуется слой поверхностных зарядов, что приводит к отличной от нуля поверхностной дивергенции.

$$\mathrm{Div}\,\vec{E}=4\pi q_0^-\delta r, \tag{1}$$

где $\delta r=r_0\sin(\omega t-k_z z)$ — смещение поверхности электронной жидкости от равновесного положения.

Для описания электрического поля вне плазмы достаточно написать уравнение Лапласа для потенциала $\nabla^2 U'=0$. В цилиндрической системе координат решения для потенциалов в случае аксиальной симметрии могут быть представлены в виде:

$$V=-\frac{e}{m\omega}U_0 I_0(k_z r)\cos(\omega t-k_z z),$$

$$U=U_0 I_0(k_z r)\sin(\omega t-k_z z),$$

$$U'=[U_1' I_0(k_z r)+U_2' K_0(k_z r)]\sin(\omega t-k_z z),$$

где $I_0(k_z r)$ — функция Бесселя чисто мнимого аргумента, а $K_0(k_z r)$ — функция Макдональда. Отсюда легко определить все компоненты вектора скорости и электрических полей.

С учетом (1) граничные условия можно записать в следующем виде:

$$(E_r' - E_r)|_{r=R} = 4\pi q_0^- \delta r, \quad (E_z' - E_z)|_{r=R} = 0, \quad E_z'|_{r=R_1} = 0, \quad \frac{\partial \delta r}{\partial t} = v_r|_{r=R},$$

где R_1 — радиус коаксиального с плазменным шнуром радиуса R идеально проводящего кожуха. Они приводят к дисперсионному соотношению

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = k_z R I_1(k_z R)\left(K_0(k_z R) - I_0(k_z R)\frac{K_0(k_z R_1)}{I_0(k_z R_1)}\right), \tag{2}$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{4\pi e^2 N_0^-}{m}$ есть ленгмюровская частота.

В волноводе конечный длины l должны устанавливаться стоячие волны, для которых можно получить

$$v_r = \frac{2e}{m\omega} E_0 I_1(k_z r)\cos(k_z l - k_z z)\cos(\omega t - k_z l), \quad v_\varphi = 0;$$

$$v_z = -\frac{2e}{m\omega} E_0 I_0(k_z r)\sin(k_z l - k_z z)\cos(\omega t - k_z l),$$

$$E_r = -2E_0 I_1(k_z r)\cos(k_z l - k_z z)\sin(\omega t - k_z l), \quad E_\varphi = 0;$$

$$E_z = -2E_0 I_0'(k_z r)\sin(k_z l - k_z z)\sin(\omega t - k_z l),$$

$$E_r' = [-2E_0' I_1(k_z r) + 2\mathcal{E}_0' K_1(k_z z)]\cos(k_z l - k_z z)\sin(\omega t - k_z l), \quad E_\varphi' = 0;$$

$$E_z' = [-2E_0' I_0(k_z r) - 2\mathcal{E}_0' K_0(k_z z)]\sin(k_z l - k_z z)\sin(\omega t - k_z l), \tag{3}$$

где $E_0 = k_z U_0$, $E_0' = k_z U_1'$, $\mathcal{E}_0' = k_z U_2'$. При этом дисперсионное соотношение (2) не изменяется.

Выражение энергии, рассчитанной на единицу длины волновода есть

$$W = \frac{1}{l}\left\{\frac{\rho_0}{2}\int_0^R\int_0^l\int_0^{2\pi} v^2 r\,dr\,dz\,d\varphi + \frac{1}{8\pi}\int_0^R\int_0^l\int_0^{2\pi} E^2 r\,dr\,dz\,d\varphi + \frac{1}{8\pi}\int_R^{R_1}\int_0^l\int_0^{2\pi} E'^2 r\,dr\,dz\,d\varphi\right\}.$$

Подставляя сюда (3) и выражая E_0' и $\mathcal{E}_0'$ через E_0, с учетом (2) получим

$$W = \frac{R^2}{2} E_0^2 \frac{I_0(k_z R) I_1(k_1(k_2 R))}{k_z R}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\cos^2(\omega t - k_z l) +$$

$$+ \frac{R^2}{2} E_0^2 \frac{I_0(k_z R) I_1(k_z R)}{k_z R}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\sin^2(\omega t - k_z l).$$

Граничное условие $\dfrac{\partial \delta r}{\partial t} = v_r|_{r=R}$ дает соотношение

$$r_0 = -\frac{2e}{m\omega^2} E_0 I_1(k_z R). \tag{4}$$

Если заменить E_0 амплитудой волны поверхностных зарядов r_0, то выражение энергии приобретает вид

$$W = \frac{1}{2M_s}\{p^2 + M_s^2\omega^2 q^2\} = \frac{p^2}{2M_s} + \frac{M_s\omega^2 q^2}{2}, \tag{5}$$

где

$$q = r_0\sqrt{\frac{I_0(k_z R)}{k_z R I_1(k_z R)}}\sin(\omega t - k_z l), \quad p = M_s\dot{q}, \quad M_s = mN_0^-\pi R^2.$$

Таким образом, волны поверхностных зарядов могут быть представлены в виде некоторого осциллятора. Лагранжева функция такой системы есть

$$L = \frac{M_s \dot{q}^2}{2} - \frac{M_s \omega^2 q^2}{2}.$$

Соответствующее ей уравнение движения гласит

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0,$$

где ω^2 определяется дисперсионным соотношением (2).

Вычислим среднее значение $<q^2>$ по Гиббсу

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q^2 e^{-W/\theta}\, dq dp}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-W/\theta}\, dq dp}.$$

Подставляя сюда (5), получим

$$\langle q^2 \rangle = \frac{\theta}{M_s \omega^2} = \frac{kT}{M_s \omega^2},$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град* есть постоянная Больцмана, T — температура, измеренная в градусах.

Определим порядок величины $<q^2>$ при $T \sim 3 \cdot 10^4$ *град*, $N_0^- \sim 10^{11}$ *см*$^{-3}$, $k_z = 1$ *см*$^{-1}$ ($\lambda = 6{,}28$ *см*) для волновода с $R = 2$ *см*, $R_1 = 4$ *см*.

Дисперсионное соотношение (2) дает величину $\omega^2 \sim 10^{20}$ *сек*$^{-2}$. Следовательно,

$$\langle q^2 \rangle \sim 10^{-14}\ см^2, \text{ т. е. } \sqrt{\langle q^2 \rangle} \sim 10^{-7}\ см.$$

Теперь определим величину r_0. Согласно (4) при $E_0 = 10$ *в/см* $= 3{,}33 \cdot 10^{-2}$ CGSE для нашего волновода имеем $r_0 \sim 10^{-3}$ *см*.

Мы видим, что величины тепловых разбросов (шумы) при обычных условиях на несколько порядков меньше амплитуды волн поверхностных зарядов, что делает возможным пренебречь влиянием шумов. Тот факт, что величина отклонения поверхности электронной жидкости от строго цилиндрической формы за счет тепловой флуктуации оказывается порядка 10^{-7} *см* и намного меньше самой амплитуды синусоидальных возмущений равновесной поверхности плазмы, может служить обоснованием введения резкой границы в теорию пространственно ограниченной плазмы.

Выражаю глубокую благодарность проф. А. А. Власову за научное руководство данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Теория многих частиц. М., ГИТЛ, 1950.
2. Trivelpiece A. W., Gould R. W. J. Appl. Phys., 30, 1784, 1959.
3. Пак Кван Ир. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 75, 1968.

Поступила в редакцию
13.5 1969 г.

Кафедра
теоретической физики