Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1970

УДК 530.145

В. Г. БАГРОВ, И. М. ТЕРНОВ, Б. В. ХОЛОМАЙ

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Проводится разделение переменных в уравнении Дирака для электрона, движущегося в неоднородном магнитном поле постоянного направления и параллельном ему, зависящем от времени электрическом поле. Для некоторых конкретных полей решения найдены в явном виде.

Общее рассмотрение задачи

Рассмотрим движение электрона (заряд — $-e$, масса покоя m) во внешнем электромагнитном поле, потенциалы которого имеют вид

$$A_x = -y_0 H_0 \Phi\left(\frac{y}{y_0}\right), \quad A_y = 0, \quad A_z = -\frac{cE_0}{\alpha}\varphi(\alpha t), \quad V = 0, \tag{1}$$

где y_0, α, H_0, E_0 — некоторые размерные постоянные, а $\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)$ и $\varphi(\alpha t)$ — безразмерные функции. Напряженности магнитного и электрического полей при таком выборе потенциала запишутся в следующей форме:

$$H_x = H_y = E_x = E_y = 0, \quad H_z = y_0 H_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} = H_0 \Phi',$$

$$E_z = \frac{E_0}{\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = E_0 \varphi'. \tag{2}$$

Таким образом рассматриваемые поля параллельны и представляют собой неоднородное постоянное магнитное поле и однородное нестационарное электрическое поле.

Волновая функция электрона должна удовлетворять уравнению Дирака

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \widehat{\mathscr{H}}\Psi, \quad \widehat{\mathscr{H}} = c(\vec{\alpha}\vec{P}) + \rho_3 mc^2, \tag{3}$$

где $\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}$ — кинетический импульс, а $\vec{\alpha}$ и ρ_3 — матрица Дирака.

В рассматриваемой задаче интегралами движения являются квазиимпульсы p_1 и p_3, ибо операторы $\hat{p}_1 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ и $\hat{p}_3 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$ коммутируют с гамильтонианом. Подчиняя волновую функцию требованию быть собственной для указанных операторов

$$\hat{p}_1 \Psi = \hbar k_1 \Psi \text{ и } \hat{p}_3 \Psi = \hbar k_3 \Psi, \tag{4}$$

решение общей задачи можно искать в виде

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{L} e^{i(k_1 x + k_3 z)}, \quad \Psi(y, t), \tag{5}$$

где 4-компонентный спинор $\Psi(y, t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{gathered}\left(\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} - k_0\right)\Psi_{1,2} - \left(k_1 - \gamma y_0 \Phi \mp \frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_{4,3} \mp \left(k_3 - \frac{eE_0}{\alpha\hbar}\varphi\right)\Psi_{3,4} = 0,\\ \left(\frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + k_0\right)\Psi_{3,4} - \left(k_1 - \gamma y_0 \Phi \mp \frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_{2,1} \mp \left(k_3 - \frac{eE_0}{\alpha\hbar}\varphi\right)\Psi_{1,2} = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

в которых $k_0 = \frac{mc}{\hbar}$ и $\gamma = \frac{eH_0}{c\hbar}$. В данном случае существует спиновый интеграл движения (см. также [1]) — оператор $\hat{\mathscr{L}}$, имеющий вид:

$$\begin{gathered}\hat{\mathscr{L}} = \Pi_3 \cos\theta + \Phi_3 \sin\theta,\\ \vec{\Pi} = mc\vec{\sigma} + \rho_2[\vec{\sigma}\vec{P}], \quad \Phi = -\rho_3[\vec{\sigma}\vec{P}],\end{gathered} \tag{7}$$

где θ — угол между направлением спина и осью z. Подчиняя волновую функцию (5) требованию быть собственной для оператора $\hat{\mathscr{L}}$

$$\hat{\mathscr{L}}\Psi = \zeta\hbar\mathscr{L}\psi, \tag{8}$$

($\zeta = \pm 1$ характеризует две возможные ориентации спина, L — собственное значение оператора), получим, что спинор ψ помимо (6) должен также удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{gathered}(k_0 \cos\theta \mp \zeta\mathscr{L})\psi_{1,2} + \cos\theta\left(k_1 - \gamma y_0 \Phi \mp \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_{4,3} -\\ - i\sin\theta\left(k_1 - \gamma y_0 \Phi \mp \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_{2,1} = 0,\\ (k_0 \cos\theta \mp \zeta\mathscr{L})\psi_{3,4} - \cos\theta\left(k_1 - \gamma y_0 \Phi \mp \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_{2,1} +\\ + i\sin\theta\left(k_1 - \gamma y_0 \Phi \mp \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi_{4,3} = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Комбинируя эти системы уравнений, их можно одновременно удовлетворить следующим выбором спинора $\psi(y, t)$:

$$\begin{gathered}\psi_{1,3} = f(y)\left[\pm C_1 \chi_1(t) + C_2 \chi_2(t)\right],\\ \psi_{2,4} = g(y)\left[C_3 \chi_1(t) \mp C_4 \chi_2(t)\right].\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь функции f, g зависят только от координаты y и удовлетворяют системе двух уравнений первого порядка:

$$\left\{\frac{d}{dy} - \gamma y_0\,\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right) + k_1\right\} f(y) = -\lambda g(y),$$

$$\left\{\frac{d}{dy} + \gamma y_0\,\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right) - k_1\right\} g(y) = \lambda f(y), \tag{11}$$

а функции χ зависят только от времени t:

$$\left\{\frac{i}{c}\,\frac{d}{dt} - \frac{eE_0}{\alpha\hbar}\,\varphi(\alpha t) + k_3\right\}\chi_1(t) = (K + k_3)\,\chi_2(t),$$

$$\left\{\frac{i}{c}\,\frac{d}{dt} + \frac{eE_0}{\alpha\hbar}\,\varphi(\alpha t) - k_3\right\}\chi_2(t) = (K - k_3)\,\chi_1(t), \tag{12}$$

причем λ и K пока некоторые неизвестные числа.

В результате выбора спинора $\psi(y, t)$ в виде (10) системы уравнений (6) и (9) приводятся к алгебраическим уравнениям коэффициентов C_i $(i=1, 2, 3, 4)$:

$$\begin{aligned}
&(K + k_3)\,C_{1,3} - k_0\,C_{2,4} \mp \lambda C_{4,2} = 0,\\
&(K - k_3)\,C_{2,4} - k_0 C_{1,3} \pm \lambda C_{3,1} = 0,\\
&(k_0\cos\theta \mp \zeta\mathscr{L})\,C_{1,3} \mp \lambda e^{\mp i\theta}\,C_{3,1} = 0,\\
&(k_0\cos\theta \mp \zeta\mathscr{L})\,C_{2,4} \pm \lambda e^{\pm i\theta}\,C_{4,2} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Восемь уравнений (13) для определения четырех коэффициентов C_i оказываются совместными при условии

$$K = \sqrt{k_0^2 + k_3^2 + \lambda^2}\,, \quad \mathscr{L} = \sqrt{k_0^2\cos^2\theta + \lambda^2}\,. \tag{14}$$

Таким образом, независимыми оказываются четыре квантовых числа k_1, k_3, λ и $\zeta = \pm 1$. Величина λ должна при этом определяться из системы (11). Система уравнений (13) при условии (14) имеет решение:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 + \zeta\frac{k_0\cos\theta}{\mathscr{L}}\right)\left(1 - \frac{k_3}{K}\right)}\; e^{-i\frac{\theta - \zeta\eta}{2}},\\
C_2 &= \frac{\zeta}{2}\sqrt{\left(1 + \zeta\frac{k_0\cos\theta}{\mathscr{L}}\right)\left(1 + \frac{k_3}{K}\right)}\, e^{i\frac{\theta - \zeta\eta}{2}},\\
C_3 &= -\frac{\zeta}{2}\sqrt{\left(1 - \zeta\frac{k_0\cos\theta}{\mathscr{L}}\right)\left(1 - \frac{k_3}{K}\right)}\, e^{i\frac{\theta + \zeta\eta}{2}},\\
C_4 &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \zeta\frac{k_0\cos\theta}{\mathscr{L}}\right)\left(1 + \frac{k_3}{K}\right)}\, e^{-i\frac{\theta + \zeta\eta}{2}},
\end{aligned} \tag{15}$$

в котором $\sin\eta = k_0\sin\theta/\sqrt{k_0^2 + \lambda^2}$, причем

$$\sum_{i=1}^{4} |c_i|^2 = 1.$$

Таким образом для определения явной зависимости волновой функции от спина (т. е. для разделения решений по состояниям поляризации) не требуется знания конкретного вида функций $\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)$ и $\varphi(\alpha t)$, а также не требуется решения системы уравнений (11) и (12).

Непосредственно из системы (11) следует, что функции f и g обладают следующими свойствами:

$$\frac{d}{dy} g^* f = \lambda (ff^* - gg^*), \text{ т. е. } \int f^* f\, dy = \int g^* g\, dy. \tag{16}$$

Поэтому обе функции можно нормировать условием

$$\int f^* f\, dy = \int g^* g\, dy = 1. \tag{17}$$

При этом нормировка полной функции имеет следующий вид:

$$\int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3x = N, \tag{18}$$

где

$$N = |\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 - \frac{k_3}{K}(|\chi_1|^2 - |\chi_2|^2). \tag{19}$$

Дифференцируя N по времени и используя уравнения (12), покажем, что нормировка (18) не зависит от времени, ибо $\frac{dN}{dt} = 0$. Поэтому можно положить постоянную $N = 1$, нормируя тем самым функции χ_1 и χ_2.

Таким образом решение уравнения Дирака нами сведено к решению систем дифференциальных уравнений первого порядка (11) и (12), для этого необходимо конкретное задание функции Φ и φ.

Квадрируя системы уравнений (11) и (12), можно получить дифференциальные уравнения второго порядка для каждой из функций f, g, χ_1, χ_2:

$$\left\{\frac{d^2}{dy^2} - (\gamma y_0 \Phi - k_1)^2 \mp \gamma \Phi' + \lambda^2\right\} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = 0,$$
$$\left\{\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2} + \left(k_3 - \frac{eE_0}{\alpha\hbar}\varphi\right)^2 + \lambda^2 + k_0^2 \pm \frac{ieE_0}{c\hbar}\varphi'\right\} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{20}$$

Здесь верхние знаки относятся к функциям f и χ_1, а нижние — к функциям g и χ_2. Эти уравнения отличаются от уравнений для скалярной частицы (Клейна — Гордона) наличием лишь производных Φ' и φ'.

Замечание о классических уравнениях Лоренца

Для полей типа (1) и (2) классические уравнения Лоренца всегда допускают решение в квадратурах. Действительно, уравнения Лоренца могут быть записаны в виде

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = -\frac{e}{mc}\left\{\vec{E}\frac{dct}{d\tau} + \left[\frac{d\vec{r}}{d\tau}\vec{H}\right]\right\}, \quad \frac{d^2ct}{d\tau^2} = -\frac{e}{mc}\left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}\vec{E}\right), \tag{21}$$

где τ — собственное время. Воспользовавшись видом полей (2), можно записать четыре первых интеграла движения:

$$\frac{dx}{d\tau} = c\left(\frac{p_1}{mc} - \frac{eH_0 y_0}{mc^2}\Phi\right), \quad \frac{dz}{d\tau} = c\left(\frac{p_3}{mc} - \frac{eE_0}{mc\alpha}\varphi\right),$$

$$\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 = c^2\left\{\left(\frac{p_\perp}{mc}\right)^2 - \left(\frac{p_1}{mc} - \frac{eHy_0}{mc^2}\Phi\right)^2\right\},$$
$$\frac{dt}{d\tau} = \left\{1 + \left(\frac{p_\perp}{mc}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{mc} - \frac{eE_0}{mc\alpha}\varphi\right)^2\right\}^{1/2}, \tag{22}$$

в которых p_1, p_3 $p_\perp$ — постоянные величины (аналоги квантовых чисел k_1, k_3 и λ). Из (22) следует решение задачи в квадратурах:

$$x - x_0 = \int \frac{\left[\frac{p_1}{mc} - \frac{eH_0y_0}{mc^2}\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)\right]dy}{\sqrt{\left(\frac{p_\perp}{mc}\right)^2 - \left[\frac{p_1}{mc} - \frac{eHy_0}{mc^2}\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)\right]^2}},$$
$$z - z_0 = c\int \frac{\left[\frac{p_3}{mc} - \frac{eE_0}{mc\alpha}\varphi(\alpha t)\right]dt}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_\perp}{mc}\right)^2 + \left[\frac{p_3}{mc} - \frac{eE_0}{mc\alpha}\varphi(\alpha t)\right]^2}}, \tag{23}$$
$$\int\left\{\left(\frac{p_\perp}{mc}\right)^2 - \left[\frac{p_1}{mc} - \frac{eH_0y_0}{mc^2}\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right)\right]^2\right\}^{-1/2} dy =$$
$$= c\int\left\{1 + \frac{p_\perp}{mc} + \frac{p_3}{mc} - \frac{eE_0}{mc\alpha}\varphi(\alpha t)\right\}^{-1/2} dt.$$

Здесь y и z определяются как функции t, a, x — как функция y, которая в свою очередь зависит от t.

Некоторые случаи конкретного выбора полей

Одним из важных случаев является однородное магнитное поле, когда $\Phi = \frac{y}{y_0}$. Решение системы (11) при этом имеет вид (см. [2])

$$f = \sqrt[4]{\gamma}\, U_{n-1}(\xi);\; g = \sqrt[4]{\gamma}\, U_n(\xi);\; \xi = \sqrt{\gamma}\left(y - \frac{k_1}{\gamma}\right),$$
$$\lambda = \sqrt{2n\gamma}, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots, \tag{24}$$

где $U_n(\xi)$ — функции Эрмита, связанные с полиномами Эрмита соотношением

$$U_n(\xi) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi). \tag{25}$$

(О решении системы (11) в некоторых случаях неоднородного поля см. [3, 4].)

Уравнения (12) допускают точное решение, например, в случае $\varphi(\alpha t) = \mathrm{th}\,\alpha t$. Такой выбор потенциала соответствует электрическому полю $E_z = E_0(\mathrm{ch}\,\alpha t)^{-2}$, обращающемуся в нуль при $t \to \pm\infty$. Величина α^{-1} в этом случае характеризует эффективное время действия поля. Тогда решение уравнений (12) может быть выражено через гипергеометрическую функцию Гаусса:

$$\chi_1 = Q(q - p - 2\delta)\left(\frac{\alpha q + ck_3 - \alpha\delta}{cK - ck_3}\right)^{1/2} \xi_1^{-ip/2} \times$$

$$\times (1-\xi_1)^{iq/2} F\left[1+\frac{i}{2}(q-p+2\delta);\right.$$

$$\left.\frac{i}{2}(q-p-2\delta);\quad 1-ip;\ \xi_1\right],$$

$$\chi_2 = -Q(q-p-2\delta)\left(\frac{\alpha q - ck_3+\alpha\delta}{cK+ck_3}\right)^{1/2} \xi_1^{-ip/2}(1-\xi_1)^{iq/2}\times$$

$$\times F\left[\frac{i}{2}(q-p+2\delta);\ (1+\frac{i}{2}q-p-2\delta);\ 1-ip;\ \xi_1\right]. \qquad (26)$$

Здесь

$$q=\frac{c}{\alpha}\sqrt{\lambda^2+k_0^2+\left(k_3-\frac{\alpha}{c}\delta\right)^2},$$

$$p=\frac{c}{\alpha}\sqrt{\lambda^2+k_0^2+\left(k_3+\frac{\alpha}{c}\delta\right)^2}, \qquad (27)$$

$$\delta=\frac{eE_0c}{\hbar\alpha^2} \quad \text{и} \quad \xi_1=\frac{1}{2}(1+\operatorname{th}\alpha t).$$

Множитель Q произволен и должен быть определен из условия нормировки. Заметим, что функции (27) переходят в стационарные решения при $t\to\pm\infty$, т. е. когда электрическое поле отсутствует. При этом из (27) при $t\to-\infty$ получим

$$\chi_1\sim\chi_2\sim\exp\left\{-ict\sqrt{\lambda^2+k_0^2+\left(k_3+\frac{\alpha}{c}\delta\right)^2}\right\}, \qquad (28)$$

а при $t\to\infty$

$$\chi_1\sim\chi_2\sim\exp\left\{-ict\sqrt{\lambda^2+k_0^2+\left(k_3-\frac{\alpha}{c}\delta\right)^2}\right\}. \qquad (29)$$

Сдвиг энергии при изменении времени от $-\infty$ до ∞ совпадает с предсказанием классической теории (см. (23)).

Очевидно также, что при $E_0=0$ эти функции переходят в волновые функции стационарных состояний

$$\chi_1\sim\chi_2\sim e^{-icKt}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тернов И. М., Багров В. Г., Бордовицын В. А. «Изв. вузов», физика, 4, 41, 1967.
2. Сб. «Синхротронное излучение» под ред. А. А. Соколова и И. М. Тернова. М., «Наука», 1966.
3. Stancin G. N. Phys. Rev. Lett., 23, 232, 1966.
4. Багров В. Г., Бордовицын В. А. «Журн. вычислит. механика и математическая физика», 8, 691, 1968.

Поступила в редакцию
1.7 1969 г.

Кафедра
теоретической физики