Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 3 — 1970

УДК 621.371.562.4

В. А. ЕЛИСЕЕВНИН

ЧАСТОТНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ СФЕРИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Рассчитаны частотные корреляции флуктуаций уровней амплитуды и фаз двух сферических волн различных частот, распространяющихся в изотропной турбулентной среде. Структурная функция показателя преломления такой среды подчиняется закону «двух третей» Колмогорова-Обухова. Рассмотрение проведено с волновой точки зрения в первом приближении метода плавных возмущений.

Турбулентное состояние атмосферы, ионосферы, моря или океана, вызывающее флуктуации показателя преломления, приводит к флуктуациям параметров распространяющихся в них волн. Исследованию статистических характеристик этих флуктуаций посвящено большое количество работ. Наряду с пространственными корреляционными функциями флуктуаций параметров волнового поля одной частоты изучаются частотные и частотно-пространственные корреляционные функции. Исследование последних дает возможность определить полосу частот, которая может быть передана через статистически неоднородную среду без искажений формы спектра сигнала, что необходимо для оценки разности частот в системах частотного и частотно-пространственного разнесенного приема в линиях связи. Использование остронаправленных антенн также требует знания частотно-пространственной корреляции флуктуаций поля в плоскости раскрыва антенны для определения той же частотной полосы.

В работах [1—6], посвященных расчету частотно-пространственных корреляционных функций флуктуаций параметров волнового поля в атмосфере и ионосфере, рассматривается статистически однородная изотропная среда с гауссовой корреляционной функцией флуктуаций показателя преломления. Наряду с этим показатель преломления реальной турбулентной атмосферы удовлетворительно описывается с помощью локально однородного поля с постоянными или плавно меняющимися средними характеристиками. Структурная функция показателя преломления такой среды подчиняется закону «двух третей» Колмогорова — Обухова. Морская среда, согласно экспериментальным данным, также лучше всего описывается с помощью модели однородной турбулентности. В работе [7] вычисляется коэффициент частотной корреляции флуктуаций уровня амплитуды волн, распространяющихся в такой среде. В работах [8] приводится расчет поперечных спектров и структурных функций флуктуаций уровня амплитуды, фазы и их взаимных корреляций для двух плоских волн различных частот, а также учитывается влияние размеров апертуры приемного устройства на частотные флуктуации интенсивности волнового поля.

В [1—8] рассматривается распространение двух плоских волн различных частот. Однако при проведении эксперимента часто приходится иметь дело с источниками, излучающими сферические волны или близкие к ним. Работы по исследованию частотно-пространственных корреляций флуктуаций параметров сферических волн нам неизвестны.

В настоящей работе с волновой точки зрения рассматривается вопрос о взаимной корреляции флуктуаций уровней амплитуд и фаз двух сферических волн различных частот. Задача решается в первом приближении метода плавных возмущений. Турбулентная среда принимается однородной и изотропной со структурной функцией показателя преломления, подчиняющейся закону «двух третей».

Пусть в начале декартовой системы координат находится источник, излучающий две сферические монохроматические волны с волновыми числами $k_1=k(1-\delta)$ и $k_2=k(1+\delta)$. Величина $\delta=\frac{k_2-k_1}{2k}$ характеризует частотный разнос распространяющихся волн. Показатель преломления среды имеет вид $n(x, y, z)=1+\mu(x, y, z)$, где $\mu(x, y, z)$ есть малые случайные отклонения от среднего значения, которое принимается равным единице ($|1\mu|\ll 1$).

Предположим, что распределение неоднородностей квазистатично, т. е. параметры, характеризующие среду, меняются настолько медленно, что зависимостью μ от времени можно пренебречь, а сами неоднородности крупномасштабны, т. е. $k_{1,2}l_0\gg 1$, где l_0 — внутренний масштаб турбулентности.

Поле каждой волны в среде описывается волновым уравнением

$$\Delta u+k^2(1+\mu)^2u=0. \tag{1}$$

Решение этого уравнения в общем виде методом плавных возмущений опустим, поскольку оно общеизвестно, а воспользуемся выражением для комплексной фазы, полученным в первом приближении метода [9][1]

$$\Phi(x, y, z)=\frac{k^2}{4\pi}\iiint\limits_V\frac{\exp\left[ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right]}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\times$$

$$\times\frac{u_0(x', y', z')}{[u_0(x, y, z)}\,\mu(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz', \tag{2}$$

V — область, заполненная неоднородностями, а u_0 — означает невозмущенную волну и удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta u_0+k^2u_0=0. \tag{3}$$

Так как невозмущенная волна является сферической, распространяющейся из начала координат, то

$$\frac{u_0(x', y', z')}{u_0(x, y, z)}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\exp\left[ik\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}-\right.$$

$$\left.-ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right].$$

[1] Комплексная фаза связана с величиной самого поля соотношением $u=\exp[\Phi_0+\Phi]$, где Φ_0 — комплексная фаза поля в нулевом приближении.

Поскольку рассматривается случай крупномасштабных неоднородностей, величина поля в точке наблюдения будет определяться рассеянием падающей волны в среде, заключенной в объеме узкого эллипсоида, с фокусами в местах нахождения источника и приемника. Поэтому в существенной для интегрирования области $|x-x'| \gg |y-y'|$, $|z-z'|$ приближенно можно положить

$$\exp\left[ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right] \simeq \exp\left\{ik\left[(x-x') + \frac{1}{2}\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{x-x'}\right]\right\},$$

$$\exp\left[ik\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} - ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right] \simeq$$

$$\simeq \exp\left\{ik\left[x' + \frac{y'^2+z'^2}{2x'} - x - \frac{y^2+z^2}{2x}\right]\right\},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \simeq \frac{1}{x-x'},$$

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} \simeq \frac{x}{x'}$$

и интегрирование по x' распространить на интервал от 0 до x, а по y' и z' на бесконечный интервал. Тогда выражение для комплексной фазы принимает вид

$$\Phi(x, y, z) = \frac{k^2x}{4\pi}\int_0^x \frac{dx'}{x'(x-x')}\iint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{(y-y')^2+(z-z')^2}{x-x'} + \frac{y'^2+z'^2}{x'} - \frac{y^2+z^2}{x}\right]\right\}\mu(x', y', z')\,dy'\,dz'. \tag{4}$$

Для определения частотных структурных и корреляционных функций флуктуаций уровня амплитуды и фазы в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн, рассчитаем величины $\langle\Phi_1(x, y_1, z_1)\overset{*}{\Phi}_2(x, y_2, z_2)\rangle$ и $\langle\Phi_1(x, y_1, z_1)\Phi_2(x, y_2, z_2)\rangle$. Знак * означает комплексно сопряженную величину, а угловые скобки — усреднение по ансамблю реализаций. Индексы 1 и 2 справа внизу относятся к различным частотам

$$\left.\begin{array}{l}\langle\Phi_1(x, y_1, z_1)\overset{*}{\Phi}_2(x, y_2, z_2)\rangle\\ \langle\Phi_1(x, y_1, z_1)\Phi_2(x, y_2, z_2)\rangle\end{array}\right\} = \frac{k^4x^2}{16\pi^2}(1-\delta^2)^2\int_0^x\int_0^x\frac{dx'\,dx''}{x'(x-x')\,x''(x-x'')}\cdot$$

$$\iiiint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{(y_1-y')^2+(z_1-z')^2}{x-x'} + \frac{z'^2+z'^2}{x'} - \frac{y_1^2+z_1^2}{x}\right](1-\delta) \mp\right.$$

$$\left.\mp\left[\frac{(y_2-y'')^2+(z_2-z'')^2}{x-x''} + \frac{y''^2+z''^2}{x''} - \frac{y_2^2+z_2^2}{x}\right]\frac{ik}{2}(1+\delta)\right\}\times$$

$$\times\langle\mu(x', y', z')\,\mu(x'', y'', z'')\rangle\,dy'\,dy''\,dz'\,dz''. \tag{5}$$

Введем обозначение

$$B_n(x'-x'',\ y'-y'',\ z'-z'')=\langle\mu(x',y',z')\,\mu(x'',y'',z'')\rangle. \qquad (6)$$

Производя замену переменных $\eta=y'-y''$, $\zeta=z'-z''$, $u=\frac{y'+y''}{2}$ и $v=\frac{z'+z''}{2}$ и используя известное соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-ax^2\pm bx)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\frac{b^2}{4a}, \qquad (6')$$

после простых, но громоздких вычислений получаем:

$$\langle\Phi_1(x,y_1,z_1)\Phi_2^*(x,y_2,z_2)\rangle=$$

$$=-\frac{ik^3x}{8\pi}\int_0^x\int_0^x\frac{(1-\delta^2)^2\,dx'\,dx''}{(x'-x'')(x-x'-x'')+[x(x'+x'')-(x'^2+x''^2)]\,\delta}\times$$

$$\times\iint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{ikx}{2}\,\frac{(1-\delta^2)\left[\left(\eta-\frac{y_1x'}{x}+\frac{y_2x''}{x}\right)^2+\left(\zeta-\frac{z_1x'}{x}+\frac{z_2x''}{x}\right)^2\right]}{(x'-x'')(x-x'-x'')+[x(x'+x'')-(x'^2+x''^2)]\,\delta}\right\}\times$$

$$\times B_n(x'-x'',\eta,\zeta)\,d\eta\,d\zeta.$$

$$\langle\Phi_1(x,y_1,z_1)\Phi_2(x,y_2,z_2)\rangle=$$

$$=\frac{ik^3x}{8\pi}\int_0^x\int_0^x\frac{(1-\delta^2)^2\,dx'\,dx''}{x(x'+x'')-(x'^2+x''^2)+(x'-x'')(x-x'-x'')\,\delta}\times$$

$$\times\iint_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{ikx}{2}\,\frac{(1-\delta^2)\left[\left(\eta-\frac{y_1x'}{x}+\frac{y_2x''}{x}\right)^2+\left(\zeta\frac{z_1x'}{x}+\frac{z_2x''}{x}\right)^2\right]}{x(x'+x'')-(x'^2+x''^2)+(x'-x'')(x-x'-x'')\,\delta}\right\}\times$$

$$\times B_n(x'-x'',\eta,\zeta)\,d\eta\,d\zeta.$$

Используя для дальнейших расчетов двумерное спектральное разложение функции $B_n(x'-x'',\eta,\zeta)$,

$$B_n(x'-x'',\ \eta,\ \zeta)=\iint_{-\infty}^{+\infty}\exp[i(\varkappa_2\eta+\varkappa_3\zeta)]\,F_n(\varkappa_2,\varkappa_3,x'-x'')\,d\varkappa_2\,d\varkappa_3, \qquad (7)$$

где $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ — пространственные волновые числа, из соотношения (6′) находим:

$$\langle\Phi_1(x,y_1,z_1)\Phi_2^*(x,y_2,z_2)\rangle=\frac{k^2}{4}(1-\delta^2)\int_0^x\int_0^x dx'\,dx''\iint_{-\infty}^{+\infty}F_n(\varkappa_2,\varkappa_3,x'-x)\times$$

$$\times\exp\left\{(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2)\,\frac{(x'-x'')(x-x'-x'')+[x(x'+x'')-(x'^2+x''^2)]\,\delta}{2ikx(1-\delta^2)}+\right.$$

$$\left.+\,i\left(\frac{y_1x'}{x}-\frac{y_2x''}{x}\right)\varkappa_2+i\left(\frac{z_1x'}{x}-\frac{z_2x''}{x}\right)\varkappa_3\right\}d\varkappa_2\,d\varkappa_3.$$

$$\langle \Phi_1(x, y_1, z_1)\,\Phi_2(x, y_2, z_2)\rangle = -\frac{k^2}{4}(1-\delta^2)\int\limits_0^x\int\limits_0^x dx'dx''\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F_n(\varkappa_2, \varkappa_3, x'-x)\times$$

$$\times\exp\left\{(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2)\,\frac{x(x'+x'')-(x'^2+x''^2)+(x'-x'')(x-x'-x'')\,\delta}{2ikx(1-\delta^2)}+\right.$$

$$\left.+\,i\left(\frac{y_1 x'}{x}-\frac{y_2 x''}{x}\right)\varkappa_2+i\left(\frac{z_1 x'}{x}-\frac{z_2 x''}{x}\right)\varkappa_3\right\}d\varkappa_2\,d\varkappa_3.$$

Поскольку функция $F_n(\varkappa_2, \varkappa_3, x'-x'')$ заметно отлична от нуля лишь в области $\varkappa(x'-x'')\leqslant 1$ (где $\varkappa=\sqrt{\varkappa_2^2+\varkappa_3^2}$), то

$$\frac{\varkappa^2(x'-x'')(x-x'-x'')}{2kx}\,\frac{1}{1-\delta^2}\leqslant\frac{\varkappa(x-x'-x'')}{2kx}\,\frac{1}{1-\delta^2}\sim$$

$$\sim\frac{\varkappa}{k}\leqslant\frac{\lambda}{l_0}\ll 1$$

в силу малости длины волны λ по сравнению с внутренним масштабом турбулентности l_0.

Аналогично

$$\frac{\varkappa^2(x'-x'')(x-x'-x'')}{2kx}\,\frac{\delta}{1-\delta^2}\ll 1$$

можно считать, что

$$\exp\left\{(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2)\,\frac{(x'-x'')(x-x'-x'')}{2kx}\,p\right\}\cong 1,$$

где

$$p=\frac{1}{1-\delta^2},\quad\frac{\delta}{1-\delta^2}.$$

Тогда

$$\langle \Phi_1(x, y_1, z_1)\,\Phi_2^*(x, y_2, z_2)\rangle = \frac{k^2}{4}(1-\delta^2)\int\limits_0^x\int\limits_0^x dx'\,dx''\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F_n(\varkappa_2, \varkappa_3, x'-x'')\times$$

$$\times\exp\left\{(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2)\,\frac{x(x'+x'')-(x'^2+x''^2)}{2ikx}\,\frac{\delta}{1-\delta^2}+\right.$$

$$\left.+\,i\left(\frac{y_1 x'}{x}-\frac{y_2 x''}{x}\right)\varkappa_2+i\left(\frac{z_1 x'}{x}-\frac{z_2 x''}{x}\right)\varkappa_3\right\}d\varkappa_2\,d\varkappa_3. \quad (8)$$

$$\langle \Phi_1(x, y_1, z_1)\,\Phi_2(x, y_2, z_2)\rangle = -\frac{k^2}{4}(1-\delta^2)\int\limits_0^x\int\limits_0^x dx'\,dx'',$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F_n(\varkappa_2, \varkappa_3, x'-x'')\exp\left\{(\varkappa_2^2+\varkappa_3^2)\,\frac{x(x'+x'')-(x'^2+x''^2)}{2ikx}\,\frac{1}{1-\delta^2}+\right.$$

$$\left.+\,i\left(\frac{y_1 x'}{x}-\frac{y_2 x''}{x}\right)\varkappa_2+i\left(\frac{z_1 x'}{x}-\frac{z_2 x''}{x}\right)\varkappa_3\right\}d\varkappa_2\,d\varkappa_3. \quad (9)$$

Введем следующую замену переменных:

$$\xi=x'-x'',\quad v=\frac{x'+x''}{2}.$$

Первые члены в экспонентах выражений (8) и (9) принимают вид

$$\frac{\varkappa^2 [x(x'+x'') - (x'^2 + x''^2)]}{2ikx} p = \frac{\varkappa^2}{2ikx} p \left[2vx - 2v^2 - \frac{\xi^2}{2} \right],$$

где

$$p = \frac{\delta}{1-\delta^2}, \quad \frac{1}{1-\delta^2},$$

$$\varkappa^2 = \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2.$$

Но в существенной для интегрирования области, как уже указывалось, $\varkappa\xi \ll 1$. Поэтому величиной $\xi^2/2$ в последнем выражении можно пренебречь. Поскольку $\xi \lesssim \sqrt{\lambda x} \ll x$, приближенно можно считать

$$i\left(\frac{y_1 x'}{x} - \frac{y_2 x''}{x}\right)\varkappa_2 \simeq i\frac{(y_1 - y_2) v}{x}\varkappa_2,$$

$$i\left(\frac{z_1 x'}{x} - \frac{z_2 x''}{x}\right)\varkappa_3 \simeq i\frac{(z_1 - z_2) v}{x}\varkappa_3.$$

Распространяя интегрирование по ξ на бесконечные пределы в силу быстрого убывания функции $F_n(\varkappa_2, \varkappa_3, \xi)$ и используя формулу

$$\int_0^\infty F_n(\varkappa_2, \varkappa_3, \xi)\, d\xi = \pi\Phi_n(0, \varkappa_2, \varkappa_3) \tag{10}$$

(где $\Phi_n(0, \varkappa_2, \varkappa_3)$ — трехмерная спектральная плотность показателя преломления среды), получаем

$$\langle \Phi_1(x, y_1, z_1)\Phi_2^*(x, y_2, z_2)\rangle = \frac{\pi k^2}{2}(1-\delta^2)\int_0^x dv \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(0, \varkappa_2, \varkappa_3) \times$$
$$\times \exp\left\{(\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2)\frac{v(x-v)}{ikx}\frac{\delta}{1-\delta^2} + i\frac{(y_1-y_2)v}{x}\varkappa_2 + \right.$$
$$\left. + i\frac{(z_1 - z_2)v}{x}\varkappa_3\right\} d\varkappa_2\, d\varkappa_3, \tag{11}$$

$$\langle \Phi_1(x, y_1, z_1)\Phi_2(x, y_2, z_2)\rangle = -\frac{\pi k^2}{2}(1-\delta^2)\int_0^x dv \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n(0, \varkappa_2, \varkappa_3) \times$$
$$\times \exp\left\{(\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2)\frac{v(x-v)}{ikx}\frac{1}{1-\delta^2} + i\frac{(y_1-y_2)v}{x}\varkappa_2 + \right.$$
$$\left. + i\frac{(z_1 - z_2)v}{x}\varkappa_3\right\} d\varkappa_2\, d\varkappa_3. \tag{12}$$

Поскольку в рассматриваемом случае поле показателя преломления изотропно

$$\Phi_n(0, \varkappa_2, \varkappa_3) = \Phi_n\left(0, \sqrt{\varkappa_2^2 + \varkappa_3^2}\right),$$

Введем новые переменные интегрирования $\varkappa_2 = \varkappa\cos\varphi$ и $\varkappa_3 = \varkappa\sin\varphi$ и обозначим $y_1 - y_2 = \rho\cos\alpha$,

$$z_1 - z_2 = \rho\sin\alpha \text{ и } \rho = \sqrt{(y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2},$$

Учитывая известную формулу

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos[\varkappa\rho\cos(\varphi-\alpha)]\, d\varphi = 2\pi I_0(\varkappa\rho),$$

где I_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, проведем интегрирование по φ, тогда выражения (11) и (12) примут следующий вид:

$$\langle \Phi_1(x, y_1, z_1)\Phi_2^*(x, y_2, z_2)\rangle =$$

$$= 2\pi^2 k^2 (1-\delta^2)\int_0^x dv \int_0^\infty \varkappa\Phi_n(\varkappa)\exp\left[\varkappa^2 \frac{v(x-v)}{ikx} \frac{\delta}{1-\delta^2}\right],$$

$$I_0\left(\varkappa\rho\frac{v}{x}\right)d\varkappa; \tag{13}$$

$$\langle \Phi_1(x, y_1, z_1)\Phi_2(x, y_2, z_2)\rangle =$$

$$= -2\pi^2 k^2 (1-\delta^2)\int_0^x dv \int_0^\infty \varkappa\Phi_n(\varkappa)\exp\left\{\varkappa^2 \frac{v(x-v)}{ikx} \frac{1}{1-\delta^2}\right\}, \tag{14}$$

$$I_0\left(\varkappa\rho\frac{v}{x}\right)d\varkappa.$$

Совместные структурные функции флуктуаций уровней амплитуд, фаз и их взаимных корреляций для двух волн различных частот определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
D_{\chi_1\chi_2}(r_1, r_2) &= \langle[\chi_1(r_1)-\chi_1(r_2)]\,[\chi_2(r_1)-\chi_2(r_2)]\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[D_1(r_1, r_2)+D_2(r_1, r_2)], \\
D_{S_1S_2}(r_1, r_2) &= \langle[S_1(r_1)-S_1(r_2)]\,[S_2(r_1)-S_2(r_2)]\rangle = \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[D_1(r_1, r_2)-D_2(r_1, r_2)], \\
D_{\chi_1S_2}(r_1, r_2) &= \langle[\chi_1(r_1)-\chi_1(r_2)]\,[S_2(r_1)-S_2(r_2)]\rangle = \\
&= \frac{1}{2}Im\,[D_2(r_1, r_2)-D_1(r_1, r_2)], \\
D_{\chi_2S_1}(r_1, r_2) &= \langle[\chi_2(r_1)-\chi_2(r_2)]\,[S_1(r_1)-S_1(r_2)]\rangle = \\
&= \frac{1}{2}Im\,[D_2(r_1, r_2)+D_1(r_1, r_2)],
\end{aligned} \tag{15}$$

где структурные функции комплексных фаз

$$\begin{aligned}
D_1(r_1, r_2) &= \langle[\Phi_1(r_1)-\Phi_1(r_2)]\,[\Phi_2^*(r_1)-\Phi_2^*(r_2)]\rangle, \\
D_2(r_1, r_2) &= \langle[\Phi_1(r_1)-\Phi_1(r_2)]\,[\Phi_2(r_1)-\Phi_2(r_2)]\rangle
\end{aligned} \tag{16}$$

и r_1 и r_2 представляют собой точки с координатами (x, y_1, z_1) и (x, y_2, z_2).

Пусть для рассматриваемого случая изотропной турбулентности трехмерная спектральная плотность флуктуаций показателя преломления среды описывается выражением

$$\Phi_n(\varkappa) = 0{,}033\, C_n^2\, \varkappa^{-11/3}, \qquad (17)$$

где C_n — структурная постоянная показателя преломления среды. Подставляя в (16) выражения (13), (14) и (17), находим

$$D_1(r_1, r_2) = 4\pi^2\, 0{,}033\, C_n^2 k^2\, (1-\delta^2) \int_0^x dv \int_0^\infty \varkappa^{-8/3} \exp\left[\varkappa^2\, \frac{v(x-v)}{ikx}\, \frac{\delta}{1-\delta^2}\right] \times$$

$$\times \left[1 - I_0\left(\varkappa\rho\, \frac{v}{x}\right)\right] d\varkappa, \qquad (18)$$

$$D_2(r_1, r_2) = -4\pi^2\, 0{,}033\, C_n^2\, k^2\, (1-\delta^2) \int_0^x dv \int_0^\infty \varkappa^{-8/3} \exp\left[\varkappa^2\, \frac{v(x-v)}{ikx}\, \frac{1}{1-\delta^2}\right] \times$$

$$\times \left[1 - I_0\left(\varkappa\rho\, \frac{v}{x}\right)\right] d\varkappa. \qquad (19)$$

Воспользуемся решением интеграла вида [9]

$$\int_0^\infty [1 - I_0(\varkappa\rho)]\, \varkappa^{-q} \exp\left(-\frac{\varkappa^2}{\varkappa_m^2}\right) d\varkappa =$$

$$= -\frac{1}{2}\, \Gamma\left(-\frac{q-1}{2}\right) \varkappa_m^{-(q-1)} \left[{}_1F_1\left(-\frac{q-1}{2},\ 1,\ -\frac{\varkappa_m^2\, \rho^2}{4}\right) - 1\right], \qquad (20)$$

где Γ — гамма-функция, ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Добавлением $w = v/(x-v)$ выражения (18) и (19) приводятся к виду

$$D_1(r_1, r_2) = A\delta^{5/6}\, i^{5/6} \left\{x^{11/6} \int_0^\infty w^{5/6}\, (1+w)^{-11/3} \times\right.$$

$$\left.\times\, {}_1F_1\left(-\frac{5}{6},\ 1,\ \frac{ik\rho^2}{4x}\, \frac{1-\delta^2}{\delta}\, w\right) dw - \int_0^x \left[\frac{v(x-v)}{x}\right]^{5/6} dv\right\}, \qquad (21)$$

$$D_2(r_1, r_2) = -Ai^{5/6} \left\{x^{11/6} \int_0^\infty w^{5/6}\, (1+w)^{-11/3} \times\right.$$

$$\left.\times\, {}_1F_1\left(-\frac{5}{6},\ 1,\ i\,\frac{k\rho^2}{4x}\,(1-\delta^2)\, w\right) dw - \int_0^x \left[\frac{v(x-v)}{x}\right]^{5/6} dv\right\}, \qquad (22)$$

где

$$A = -2\pi^2\, 0{,}033\, C_n^2\, \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) k^{7/6}\, (1-\delta^2)^{1/6}.$$

Воспользовавшись решениями интегралов [10, стр. 964, 11]

$$\int_0^1 y^{5/6}\, (1-y)^{5/6}\, dy = \frac{6}{11}\, {}_2F_1\left(\frac{11}{6},\ -\frac{5}{6},\ \frac{17}{6},\ 1\right),$$

$$\int_0^\infty y^{5/6}(1+y)^{-11/3}\,{}_1F_1\left(-\frac{5}{6},\ 1,\ i\frac{k\rho^2}{4x}y\right)dy =$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\ 1,\ -i\frac{k\rho^2}{4x}\right)-$$

$$-\frac{6}{11\,\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}\left[-i\frac{k\rho^2}{4x}\right]^{11/6}{}_2F_2\left(\frac{11}{3},\ 1;\ \frac{17}{6},\ \frac{17}{6};\ -i\frac{k\rho^2}{4x}\right),$$

и формулами (15), находим

$$D_{\substack{\chi_1\chi_2\\ S_1S_2}}(\rho)=\frac{1}{2}Ax^{11/6}\operatorname{Re} i^{5/6}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}\left[\delta^{5/6}\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\ 1,\ Z\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)\mp\right.\right.$$

$$\left.\mp\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\ 1,\ Z(1-\delta^2)\right)\right]-\frac{6}{11}\,\frac{Z^{11/6}}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}\left[\delta^{5/6}\left(\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)^{11/6}\times\right.$$

$$\times\,{}_2F_2\left(\frac{11}{3},\ 1;\ \frac{17}{6},\ \frac{17}{6};\ Z\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)\mp$$

$$\left.\mp(1-\delta^2)^{11/6}\,{}_2F_2\left(\frac{11}{3},\ 1;\ \frac{17}{6},\ \frac{17}{6};\ Z(1-\delta^2)\right)\right]+$$

$$\left.+\frac{6}{11}(1\pm\delta^{5/6})\,{}_2F_1\left(\frac{11}{6},\ -\frac{5}{6},\ \frac{17}{6},\ 1\right)\right\}, \tag{23}$$

$$D_{\substack{\chi_1S_2\\ \chi_2S_1}}(\rho)=\frac{1}{2}Ax^{11/6}\,Im\, i^{5/6}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}\times\right.$$

$$\times\left[\mp\delta^{5/6}\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\ 1,\ Z\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)-\right.$$

$$\left.-\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\ 1,\ Z(1-\delta^2)\right)\right]+\frac{6}{11}\,\frac{Z^{11/6}}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)}\left[\pm\delta^{5/6}\left(\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)^{11/6}\times\right.$$

$$\times\,{}_2F_2\left(\frac{11}{3},\ 1;\ \frac{17}{6},\ \frac{17}{6};\ Z\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)+$$

$$\left.+(1-\delta^2)^{11/6}\,{}_2F_2\left(\frac{11}{3},\ 1;\ \frac{17}{6},\ \frac{17}{6};\ Z(1-\delta^2)\right)\right]+$$

$$+\frac{6}{11}(1\pm\delta^{5/6})\,{}_2F_1\left(\frac{11}{6},\,-\frac{5}{6},\,\frac{17}{6},\,1\right)\Bigg\},\qquad(24)$$

где

$$Z=-i\frac{k\rho^2}{4x}.$$

Остановимся подробнее на частотной корреляции флуктуации уровня амплитуды. При $\rho\to\infty$

$$D_{\chi_1\chi_2}(\infty)=\frac{1}{2}Ax^{11/6}(1-\delta^{5/6})\,{}_2F_1\left(\frac{11}{6},\,-\frac{5}{6},\,\frac{17}{6},\,1\right)\qquad(25)$$

и частотная корреляционная функция флуктуаций уровня амплитуды примет вид

$$B_{\chi_1\chi_2}(\rho)=\frac{1}{2}[D_{\chi_1\chi_2}(\infty)-D_{\chi_1\chi_2}(\rho)]=$$

$$=Pk^{7/6}x^{11/6}(1-\delta^2)\left\{\left(\frac{1}{1-\delta^2}\right)^{5/6}\left[\mathrm{Re}\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\,1,\,Z(1-\delta^2)\right)-\right.\right.$$

$$-\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{12}Im\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\,1,\,Z(1-\delta^2)\right)-Q\left[\frac{k\rho^2}{4x}(1-\delta^2)\right]^{11/6}\times$$

$$\left.\times Im\,{}_2F_2\left(\frac{11}{3},\,1;\,\frac{17}{6},\,\frac{17}{6};\,Z(1-\delta^2)\right)\right]-$$

$$-\left(\frac{\delta}{1-\delta^2}\right)^{5/6}\left[\mathrm{Re}\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\,1,\,Z\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)-\right.$$

$$-\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{12}Im\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\,1,\,Z\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)-$$

$$\left.\left.-Q\left[\frac{k\rho^2}{4x}\,\frac{1-\delta^2}{\delta}\right]^{11/6}Im\,{}_2F_2\left(\frac{11}{3},\,1;\,\frac{17}{6},\,\frac{17}{6};\,Z\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)\right]\right\},\qquad(26)$$

где

$$P=\frac{3}{5}\,0{,}033\,C_n^2\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}\cos\frac{5\pi}{12},$$

$$Q=\frac{6\Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}{11\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)\cos\frac{5\pi}{12}}.$$

Нормированный коэффициент частотной корреляции флуктуаций уровня амплитуды будет определяться выражением

$$b_{\chi_1\chi_2}(\rho)=\frac{B_{\chi_1\chi_2}(\rho)}{\sqrt{B_{\chi_1}(\rho)\,B_{\chi_2}(\rho)}}=\frac{1}{(1-\delta^2)^{5/12}}\left\{\mathrm{Re}\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\,1,\,Z(1-\delta^2)\right)-\right.$$

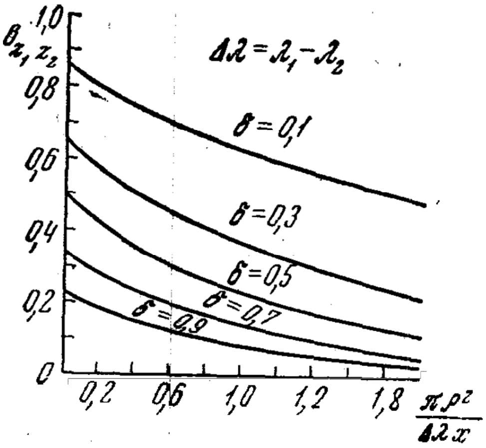
$$-\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{12}Im\,{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\,1,\,Z(1-\delta^2)\right)-$$

$$-Q\left[\frac{k\rho^2}{4x}(1-\delta^2)\right]^{11/6}Im\,{}_2F_2\left(\frac{11}{6},\,1;\,\frac{17}{6},\,\frac{17}{6};\,Z(1-\delta^2)\right)-$$

$$-\delta^{5/6}\operatorname{Re}{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\ 1,\ Z\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)+\delta^{5/6}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}Im{}_1F_1\left(\frac{11}{6},\ 1,\ Z\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)+$$

$$+\delta^{5/6}Q\left[\frac{k\rho^2}{4x}\ \frac{1-\delta^2}{\delta}\right]^{11/6}Im{}_2F_2\left(\frac{11}{3},\ 1;\ \frac{17}{6},\ \frac{17}{6};\ Z\frac{1-\delta^2}{\delta}\right)\Bigg\}. \quad (27)$$

При $\rho=0$ последнее выражение принимает вид



$$b_{\chi_1\chi_2}(0)=\frac{B_{\chi_1\chi_2}(0)}{\sqrt{B_{\chi_1}(0)\,B_{\chi_2}(0)}}=\frac{1-\delta^{5/6}}{(1-\delta^2)^{5/12}}. \quad (28)$$

Согласно [8, 9] это выражение совпадает с нормированным коэффициентом частотной корреляции флуктуаций уровня амплитуды в точке для случаев плоских волн. Этот результат особенно интересен, поскольку позволяет предположить, что нормированный коэффициент частотной корреляции флуктуаций уровня амплитуды в точке для волнового пучка будет определяться тем же выражением (28). На рисунке представлены графики функции $b_{\varkappa_1\varkappa_2}(\rho)$, $(\Delta\lambda=\lambda_1-\lambda_2)$.

В заключение выражаю благодарность В. А. Красильникову за ценные советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахарева М. Ф. «Радиотехника и электроника», № 1, 1959; № 10, 1961; № 3, 1968; № 6, 1968.
2. Брауде С. Я., Канер Э. А. «Изв. вузов», радиофизика, № 2, 1962.
3. Ерухимов Л. М. «Геомагнетизм и аэрономия», № 1, 1964; № 2, 1966.
4. Алимов В. А., Ерухимов Л. М. «Изв. вузов», радиофизика, № 5, 1967; № 2, 1968.
5. Альбер Я. И., Ерухимов Л. М., Рыжов В. А., Урядов В. П. «Изв. вузов», радиофизика, № 9, 1968.
6. Ерухимов Л. М., Урядов В. П. «Изв. вузов», радиофизика, № 12, 1968.
7. Татарский В. И., Жукова Л. Н. ДАН СССР, 124, № 3, 1959.
8. Елисеевнин В. А. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 1969.
9. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., «Наука», 1967.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
11. Fried D. L. JOSA, 57, No. 2.

Поступила в редакцию
9.5 1969 г.

Кафедра
океанологии