

Г. А. БЕНДРИКОВ, В. И. ОГОРОДНИКОВА, Н. А. СУХАЧЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С АНТИСИММЕТРИЧНЫМИ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

В работе исследуются основные свойства траекторий корней характеристических уравнений вида $N(p) + jaM(p) = 0$ с комплексными коэффициентами, дающие возможность качественного и количественного изучения динамики идентичных двумерных систем. Даны геометрический и аналитический способы построения траекторий корней. Степень уравнения траекторий относительно ω^2 значительно ниже степени характеристического уравнения. Это позволяет проводить рассмотрение двухканальных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высокого порядка. Рассмотрены примеры построения траекторий корней.

Работа посвящена исследованию свойств двумерных систем с идентичными каналами и антисимметричными перекрестными (прямыми)¹ связями (рис. 1) методом траекторий корней [1, 2]. В качестве свободного параметра (параметра траекторий), изменяющегося в широких пределах, выбран коэффициент усиления блоков связи a . Характеристические уравнения систем с антисимметричными связями могут быть представлены в виде множителей с комплексными коэффициентами, поэтому изучение свойств двумерных систем приводится к исследованию общих свойств траекторий корней характеристических уравнений с комплексными коэффициентами. Пользуясь основными свойствами траекторий корней, уравнениями траекторий корней и формулами параметра траекторий, возможно качественное и количественное изучение двумерных систем высокого порядка.

Как известно [2, 3], характеристические уравнения для двумерных систем с идентичными каналами и антисимметричными перекрестными (прямыми) связями имеют вид

$$[1 + W(p)]^2 + [a(p)]^2 = [1 + W(p) + ja(p)][1 + W(p) - ja(p)] = 0, \quad (1)$$

$$W(p) = \frac{k\Psi_m(p)}{\Phi_n(p)}, \quad (n \geq m) \quad (2)$$

¹ Схемы с обратными перекрестными связями преобразуются к схемам с прямыми перекрестными связями.

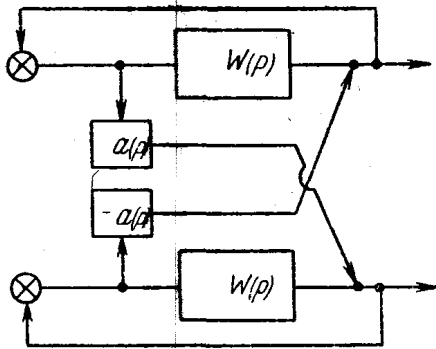
передаточная функция основного канала,

$$a(p) = \frac{aA_l(p)}{B_s(p)} \quad (3)$$

есть передаточная функция блока перекрестной связи. В передаточных функциях p — переменная преобразования Лапласа, $\Phi_n(p)$, $\Psi_m(p)$, $B_s(p)$ и $A_l(p)$ — полиномы относительно p целых положительных степеней n , m , s и l с действительными коэффициентами.

Принимая во внимание (2) и (3), характеристическое уравнение (1) запишем в виде

$$[B_s(\Phi_n + k\Psi_m) + jaA_l\Phi_n][B_s(\Phi_n + k\Psi_m) - jaA_l\Phi_n] = 0. \quad (4)$$



В характеристическом уравнении $p = \delta + j\omega$ — комплексная частота. В качестве параметра траекторий корней принимаем коэффициент усиления блока перекрестной связи a . Свободный параметр изменяется в пределах $0 < a < \infty$.

Исследование и построение траекторий корней достаточно провести для одного из сомножителей уравнения (4), например, первого:

$$[B_s(\Phi_n + k\Psi_m) + jaA_l\Phi_n] = 0, \quad (5)$$

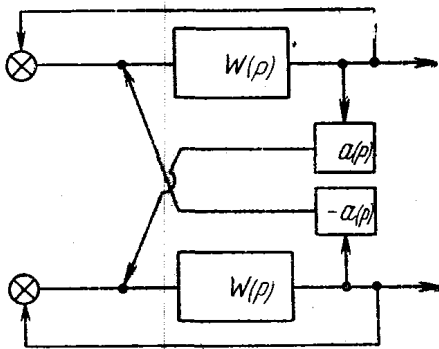


Рис. 1

так как корни другого являются комплексно-сопряженными. Или иначе, в уравнении (4) будем относить знаки \pm к свободному параметру a и считать его параметром траекторий корней, изменяющимся в пределах $-\infty < a < \infty$. Отдельным множителям уравнения (4) соответствуют положительный ($a \geq 0$) и отрицательный ($a \leq 0$) корневые годографы или соответственно нечетные и четные траектории корней уравнения (5), которые составляют полный корневой годограф исследуемой системы. При этом начальные и предельные точки являются двойными.

Перейдем к изложению геометрического метода траекторий корней, который позволяет выявить ряд особенностей траекторий корней уравнений с комплексными коэффициентами вида (4) и приводит к возможности качественного рассмотрения свойств систем с антисимметричными перекрестными связями.

Геометрический метод построения траекторий корней

В уравнении (5) считаем коэффициенты полиномов и коэффициент усиления основного канала k заданными. Степень $(n+s)$ первого слагаемого в уравнении (5) определяется числом полюсов передаточных функций блоков основного канала и перекрестной связи, степень второго слагаемого $(n+l)$ определяется числом полюсов передаточной функции основного канала и числом нулей передаточной функции блока пере-

крестной связи. Одновременно число $(n+s)$ соответствует числу начальных точек $(a=0)$ траекторий:

$$B_s(\Phi_n + k\Psi_m) = 0 \quad (6)$$

(из которых часть может быть определена выбором коэффициента k) и $(n+l)$ — числу предельных точек $(a=\pm\infty)$ траекторий:

$$A_l\Phi_n = 0. \quad (7)$$

Число основных (начальных и предельных) точек траекторий определяет класс систем. В данном случае уравнение (5) является уравнением класса $[n+s; n+l]$. Заметим, что полное характеристическое уравнение (1) является уравнением класса $[2(n+s); 2(n+l)]$.

При непрерывном изменении параметра траекторий a от 0 до $\pm\infty$ из начальных p_ν ($\nu=1, 2, \dots (n+s)$) выходят $2(n+s)$ траекторий корней, из них $2(n+l)$ оканчиваются в предельных точках z_μ ($\mu=1, 2, \dots (n+l)$), остальные $2(s-l)$ корней уходят в бесконечность (для $s>l$). Все эти траектории образуют полный корневой годограф уравнения (4). Можно также сказать, что положительный ($a\geq 0$) и отрицательный корневые годографы уравнения (5) образуют полный корневой годограф исследуемой системы (4). Зная начальные p_ν и предельные z_μ точки, исследуемое уравнение (5) можно переписать в виде

$$c_0 \prod_1^{n+s} (p - p_\nu) + jad_0 \prod_1^{n+l} (p - z_\mu) = 0, \quad n > m. \quad (8)$$

Для точек на траекториях $p=p^*$ уравнение (8) превращается в тождество.

Представим на плоскости p векторы $(p^* - p_\nu)$ и $(p^* - z_\mu)$ в виде

$$(p^* - p_\nu) = |p^* - p_\nu| e^{i\varphi}, \quad (p^* - z_\mu) = |p^* - z_\mu| e^{i\psi}, \quad (9)$$

где $|p^* - p_\nu|$, $|p^* - z_\mu|$ — модули, а φ и ψ — фазы этих векторов (на комплексной плоскости это углы, составленные векторами с положительным направлением действительной оси). Из уравнения (8), используя (9), найдем параметр траекторий корней:

$$\bar{a} = - \frac{\prod_1^{n+s} |p^* - p_\nu|}{\prod_1^{n+l} |p^* - z_\mu|} e^{i \left(\sum_1^{n+s} \varphi_\nu - \sum_1^{n+l} \psi_\mu - \frac{\pi}{2} \right)},$$

где $\bar{a} = \frac{ad_0}{c_0}$ — приведенный параметр траекторий (при $n=m$ приведенный параметр $\bar{a} = \frac{aa_0d_0}{c_0(a_0 + kb_0)}$). Из условия действительности приведенного параметра находим основное фазовое уравнение

$$\sum_1^{n+s} \varphi_\nu - \sum_1^{n+l} \psi_\mu - \frac{\pi}{2} = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \dots \quad (10)$$

С помощью (10) формула параметра траекторий корней преобразуется к виду

$$\bar{a} = (-1)^{N+1} \frac{\prod_1^{n+s} |p^* - p_\nu|}{\prod_1^{n+l} |p^* - z_\mu|}, \quad N = 0, \pm 1, \dots \quad (11)$$

Нечетным значениям $N(\bar{a} \geq 0)$ соответствуют нечетные траектории, четным $N(\bar{a} \leq 0)$ соответствуют четные траектории.

Аналогично характеристическим уравнениям с действительными коэффициентами [1] определяются асимптотические свойства корневых годографов для уравнений с комплексными коэффициентами. Центр звезды асимптот находится по формуле

$$a^* = \frac{\sum_1^{n+s} p_v - \sum_1^{n+l} z_\mu}{(n+s) - (n+l)} = \frac{\sum_1^{n+s} p_v - \sum_1^{n+l} z_\mu}{(s-l)}. \quad (12)$$

Углы наклона асимптот к действительной оси определяются из основного фазового уравнения. Для бесконечно удаленных точек траекторий Φ_v и Ψ_μ в уравнении (10) будут равными

$$\varphi_N = \frac{\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi}{s-l}, \quad N = 0, \pm 1, \dots \quad (13)$$

Таким образом, направление асимптот (13) определяется только числом полюсов s и нулей l передаточной функции блока связи. При $s=l$ из $2(n+s)$ начальных точек корни по $2(n+s)$ траекториям при $a \rightarrow \pm\infty$ приходят в $2(n+s)$ предельные (конечные) точки. Асимптот нет. Центр асимптот находится в бесконечности. Если $s=l=0$, т. е. перекрестная связь жесткая $a(p) = a$, асимптот также нет и центр асимптот находится в бесконечности. Если $s < l$, то в этом случае за параметр траекторий в уравнении (5) принимаем $p = 1/a$ и тогда начальные и предельные точки меняются местами, поворот звезды асимптот происходит в противоположном направлении (13).

Основным отличием корневых годографов, рассмотренных выше, от корневых годографов характеристических уравнений с действительными коэффициентами является поворот звезды асимптот на угол $\varphi_0 = \pi/2(s-l)$ относительно положительного направления действительной оси. Отсюда следует, что действительная ось никогда не совпадает с асимптотами корневых годографов для уравнений вида (4).

Из рассмотрения основного фазового уравнения (10) следует, что оно не выполняется для точек, лежащих на действительной оси, кроме действительных основных точек, так как N для этих точек не может быть равно целому числу. Значит, из начальных точек, лежащих на действительной оси, корни не могут перемещаться по действительной оси.

В дальнейшем покажем, что траектории корней могут пересекать действительную ось только в основных точках, лежащих на действительной оси. Отсюда следует, что характеристическое уравнение типа (5) с комплексными коэффициентами, а следовательно, и уравнение (1) для любых значений a имеют только колебательные решения и не имеют решений вида $e^{-\delta t}$.

Качественную картину возможных корневых годографов системы (1) можно получить, зная расположение основных точек на плоскости p , используя асимптотические свойства траекторий корней (положение центра звезды асимптот, направление асимптот) и применяя основное фазовое уравнение для определения углов, под которыми траектории выходят из начальных точек и входят в предельные [1].

Построение корневых годографов уравнений любого порядка с комплексными коэффициентами вида (4) и их калибровка по параметру a

возможны с помощью измерения аргументов (10) и модулей (11) векторов, проведенных из основных точек в точки на плоскости комплексных частот.

Аналитический метод построения траекторий корней

Перейдем к аналитическому выводу уравнений траекторий корней и формул параметра.

Обозначим

$$N(p) = B_s(\Phi_n + k\Psi_m), \quad M(p) = A_l\Phi_n, \quad (14)$$

тогда уравнение (5) преобразуется к виду

$$N(p) + jaM(p) = 0. \quad (15)$$

Здесь полиномы $N(p)$ и $M(p)$ степеней $(n+s)$ и $(n+l)$ соответственно. Подставляя $p = \delta + j\omega$ в (14) и разделяя действительную и мнимую части, получим:

$$N = N_r + j\omega N_j, \quad M = M_r + j\omega M_j, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} N_r &= N(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} N''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} N^{IV}(\delta) - \dots, \\ N_j &= N'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} N'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} N^V(\delta) - \dots, \\ M_r &= M(\delta) - \frac{\omega^2}{2!} M''(\delta) + \frac{\omega^4}{4!} M^{IV}(\delta) - \dots, \\ M_j &= M'(\delta) - \frac{\omega^2}{3!} M'''(\delta) + \frac{\omega^4}{5!} M^V(\delta) - \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив соотношения (16) в уравнение (15) и приравняв нулю действительную и мнимую части, получим два уравнения для трех величин δ , ω и a (все остальные величины заданы):

$$N_r - a\omega M_j = 0, \quad \omega N_j + aM_r = 0. \quad (18)$$

Отсюда получаем уравнение траекторий корней, связывающие δ и ω

$$\begin{vmatrix} N_r & -\omega M_j \\ \omega N_j & M_r \end{vmatrix} = N_r M_r + \omega^2 N_j M_j = 0 \quad (19)$$

и формулы параметра траекторий

$$a = \frac{N_r}{\omega M_j} = -\frac{\omega N_j}{M_r}. \quad (20)$$

Из уравнений (18) следует, что действительная ось, вообще говоря, не является траекторией корней, как это имело место для характеристических уравнений с действительными коэффициентами [1]. Уравнение траекторий корней (19) дает полный корневой портрет системы (4), причем нечетные траектории соответствуют первому сомножителю, четные — второму.

С помощью соотношений (17) преобразуем уравнение траекторий корней (19), собирая члены с одинаковыми степенями ω , к виду

$$\begin{aligned}
& NM - \omega^2 \left(\frac{NM''}{0!2!} - \frac{N'M'}{1!1!} + \frac{N''M}{2!0!} \right) + \\
& + \omega^4 \left(\frac{NM^{IV}}{0!4!} - \frac{N'M'''}{1!3!} + \frac{N''M''}{2!2!} - \frac{N'''M'}{3!1!} + \frac{N^{IV}M}{4!0!} \right) - \\
& - \omega^6 \left(\frac{NM^{VI}}{0!6!} - \dots \right) + \dots = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Дифференцирование функций $N(\delta)$ и $M(\delta)$ ведется по δ . Положив в уравнении (21) $\omega=0$, получим, согласно (14), уравнение, определяющее точки пересечения траекторий корней с действительной осью

$$N(\delta)M(\delta) = B_s(\delta) [\Phi_n(\delta) + k\Psi_m(\delta)] A_l(\delta) \Phi_n(\delta) = 0.$$

Таковыми точками могут быть только начальные и предельные точки, лежащие на действительной оси. Иначе, нет точек пересечения траекторий корней с действительной осью во всем интервале изменения свободного параметра a (от 0 до $\pm\infty$).

Уравнение кратных точек находим из совместного рассмотрения уравнения (15) и его производной по p

$$\begin{vmatrix} N(p) & M(p) \\ N'(p) & M'(p) \end{vmatrix} = NM' - N'M = 0. \tag{22}$$

Отсюда следует, что положительный и отрицательный годографы могут иметь $(2n+s+l-1)$ -кратные точки. Однако они могут находиться на действительной оси только в том случае, если совпадают с действительными основными точками. Уравнение траекторий корней (21) и уравнение кратных точек (22) при $\omega=0$ не совпадают, как это имело место для уравнений с действительными коэффициентами вида $\Phi_n + k\Psi_m = 0$ [1].

Критические частоты ω_k и критические значения свободного параметра a_k находятся из уравнений траекторий корней (19) или (21) и формул параметра (20) при $\delta=0$.

В уравнение траекторий корней (21) входят только четные степени ω , поэтому это уравнение имеет порядок относительно ω^2 значительно ниже порядка исследуемого характеристического уравнения. Например, для уравнений классов [1; 1], [2; 0], [2; 1], [3; 0] уравнение траекторий корней линейно относительно ω^2 , для уравнений классов [2; 2], [3; 1], [3; 2], [4; 0], [5; 0] — второго порядка относительно ω^2 , и для систем классов [3; 3], [4; 2], [4; 3], [5; 1], [5; 2], [6; 0], [6; 1], [7; 0] — кубическое относительно ω^2 .

Таким образом, исследование характеристических уравнений достаточно высокого порядка приводится к рассмотрению уравнений траекторий корней значительно более низкого порядка, во-первых, из-за представления исходного уравнения (1) в виде произведения двух сомножителей и, во-вторых, за счет того, что уравнение траекторий корней содержит только четные степени ω . Возможность элементарного построения траекторий корней для характеристических уравнений высокого порядка вида (4) связана с выбором в качестве параметра траекторий коэффициента усиления блоков связи a . При выборе в уравнении (4) в качестве параметра траекторий коэффициента усиления основного блока k уравнение траекторий содержит как четные, так и нечетные степени ω [3, 4].

Выше рассмотрены основные свойства и особенности корневых годографов уравнений типа (4). Другие свойства траекторий корней аналогичны свойствам траекторий корней характеристических уравне-

ний с действительными коэффициентами, рассмотренных в работе [1]. Заметим, что качественное рассмотрение корневых годографов приводит к выделению областей плоскости p , где необходимо точное построение траекторий по уравнению (21).

Рассмотрим примеры построения корневых годографов систем различных классов, иллюстрирующие основные свойства траекторий корней характеристических уравнений с комплексными коэффициентами при выборе в уравнении (4) в качестве параметра траекторий a . Ниже на рисунках начальные и предельные точки траекторий отмечены крестом и кружком. Полному корневому годографу соответствуют двойные начальные и предельные точки. Нечетные траектории корней на рисунках обозначены стрелкой, двойными стрелками — четные.

Пусть дано характеристическое уравнение класса [1; 1]

$$(p+1) + ja\rho = 0,$$

где $0 \leq a < \infty$. Нечетные траектории (рис. 2) выходят из начальной точки $p_1 = -1$ и заканчиваются в предельной точке $z_1 = 0$. Сопряженному уравнению $(p+1) - ja\rho = 0$, где $-\infty < a \leq 0$, соответствуют четные траектории. Уравнение траекторий корней (21) имеет вид

$$\delta(\delta + 1) + \omega^2 = 0.$$

По этому уравнению построены нечетные и четные траектории, т. е. полный корневой годограф исследуемой системы. Из (20) находим формулы параметра для нечетных

$$a = \frac{\delta + 1}{\omega} = -\frac{\omega}{\delta}$$

и для четных траекторий

$$-a = \frac{\delta + 1}{\omega} = -\frac{\omega}{\delta}.$$

Асимптот нет. Центр асимптот находится в бесконечности.

Таким образом, полный корневой портрет системы с характеристическим уравнением вида $(p+1)^2 + a^2 p^2 = 0$ (см. рис. 2), построенный на рис. 2, показывает, что корни перемещаются по окружности радиуса 0,5 с центром в точке $-0,5$ и ни при одном значении параметра a не выходят в правую полуплоскость. Система устойчива при любых значениях коэффициентов усиления блоков связи.

Рассмотрим характеристическое уравнение класса [2; 1] (система описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка):

$$(p+1)(p+2) + ja(p+3) = 0 \quad (\text{см. рис. 3}).$$

Так как нас интересует полный корневой годограф, то считаем $-\infty < a < +\infty$. Начальные точки траекторий: $p_1 = -1$, $p_2 = -2$ и предельная точка $z_1 = -3$ — двойные. Уравнение траекторий корней находим по формуле (21): $\omega^2 + (\delta+1)(\delta+2)(\delta+3) = 0$.

Формула параметра (20):

$$a = \frac{\delta^2 + 3\delta}{\omega} + 2 - \omega^2 = -\frac{\omega(2\delta + 3)}{\delta + 3}.$$

Траектории корней приведены на рис. 3. Центр звезды асимптот находится в точке $a^* = 0$. Асимптоты направлены под углами $\varphi_0 = \pi/2$, $\varphi_1 = 3\pi/2$ к действительной оси. Из двойной начальной точки $p_1 = -1$ корни, приближаясь к асимптоте, уходят в бесконечность. Из двойной

начальной точки $p_2 = -2$ корни характеристического уравнения движутся по четным и нечетным траекториям в предельную двойную точку $z_1 = -3$. Корневой портрет полностью лежит в левой полуплоскости. Система устойчива при любых значениях a .

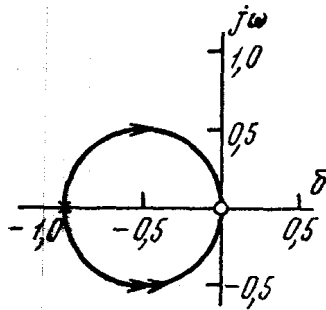


Рис. 2

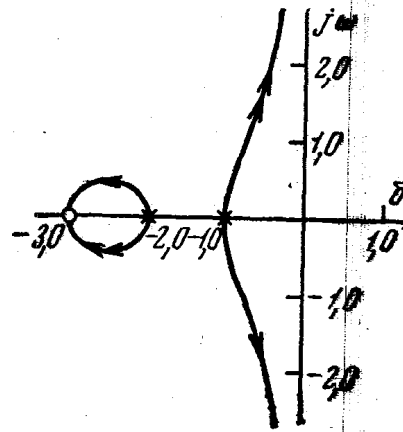


Рис. 3

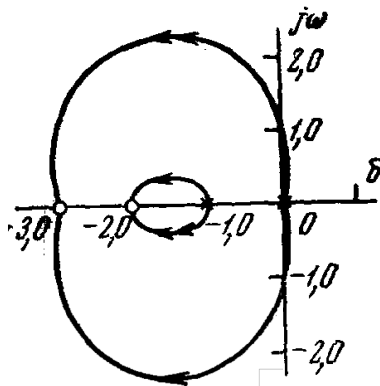


Рис. 4

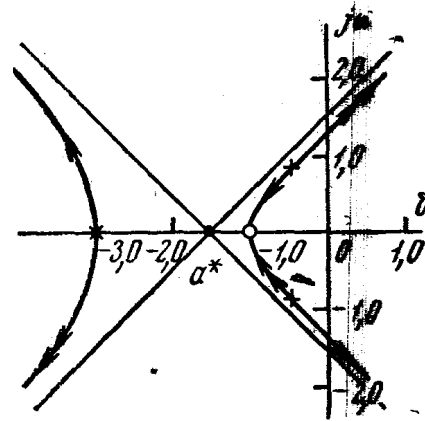


Рис. 5

Рассмотрим характеристическое уравнение класса [2; 2]

$$p(p+1) + ja(p+2)(p+3) = 0 \quad (\text{см. рис. 4}),$$

где $-\infty < a < \infty$.

Начальные точки $p_1 = 0$, $p_2 = -1$ и предельные точки $z_1 = -2$ и $z_2 = -3$ — двойные. Пользуясь (21), получим уравнение траекторий корней

$$\omega^4 + (2\delta^2 + 6\delta + 1)\omega^2 + \delta(\delta + 1)(\delta + 2)(\delta + 3) = 0, \quad (23)$$

а из (20) найдем формулы параметра:

$$a = \frac{\delta^2 + \delta - \omega^2}{\omega(2\delta + 5)} = -\frac{\omega(2\delta + 1)}{\delta^2 + 5\delta + 6 - \omega^2}, \quad (24)$$

Траектории корней представлены на рис. 4. Центр звезды асимптот находится в бесконечности. При $\delta = 0$ из (23) и (24) находим соответственно критические частоты и критические значения параметра $\omega_k = \pm 1$, $a_k = \mp 0,2$. Система устойчива в области $0,2 < a < \infty$. При значениях свободного параметра a , изменяющихся в пределах $0 < a < 0,2$, система неустойчива.

Построим траектории корней (рис. 5) для уравнения класса [3; 1] (система описывается дифференциальным уравнением шестого порядка):

$$(p^3 + 4p^2 + 4p + 3) + ja(p + 1) = 0 \quad (\text{см. рис. 5}).$$

Пределы изменения параметра траекторий: $-\infty < a < \infty$. Начальные точки $p_{1,2} = -0,5 \pm 0,866j$, $p_3 = -3$ и предельные точки $z_1 = -1$ двойные. Центр звезды асимптот находится в точке $a^* = -1,5$ (рис. 5). Углы наклона асимптот к действительной оси равны $\varphi_0 = 45^\circ$, $\varphi_1 = 135^\circ$, $\varphi_2 = 225^\circ$, $\varphi_3 = 315^\circ$. Уравнение траекторий корней и формулы для вычисления свободного параметра находим, согласно (21) и (20)

$$\omega^4 - \delta\omega^2 - (\delta + 1)(\delta + 3)(\delta^2 + \delta + 1) = 0, \quad (25)$$

$$a = \frac{\delta^3 + 4\delta^2 + 4\delta + 3 - (3\delta + 4)\omega^2}{\omega} = -\frac{(3\delta^2 + 8\delta + 4)\omega - \omega^3}{\delta + 1}. \quad (26)$$

Положив $\delta = 0$ в уравнениях (25) и (26), находим критические частоты и соответствующие им критические значения параметра $\omega_k = \pm 1,315$ и $a_k = 2,98$. Система устойчива при $0 < a < 2,98$. При $a > 2,98$ корни по траекториям переходят в правую полуплоскость и система становится неустойчивой.

Исследование траекторий корней позволяет, как это видно из рассмотренных примеров, проследить изменение динамических свойств двухканальных систем с антисимметричными перекрестными прямыми связями, описываемыми дифференциальными уравнениями достаточно высокого порядка, в области устойчивости и на ее границах.

Аналогично могут быть исследованы двумерные системы с антисимметричными обратными перекрестными связями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
2. Красовский А. А. «Автоматика и телемеханика», 18, № 2, 1957.
3. Бендриков Г. А., Огородникова В. И. «Автоматика и телемеханика», № 4, 1967.
4. Бендриков Г. А., Огородникова В. И. К общей теории двумерных систем. Исследование двумерных систем с антисимметричными и симметричными перекрестными связями. Доклад на II Всесоюзном совещании по теории и методам построения систем многосвязного регулирования. М., «Наука», 1970.

Поступила в редакцию
11.6 1969 г.

Кафедра
физики колебаний