11. Гуменюк В. С., Иванов В. Е., Лебедев В. В. Сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1. Минск, стр. 94, 1962.
12. Allen R. D., Glasier L. F., Jordan P. L. J. Appl. Phys., 31, 8, 1960.

Поступила в редакцию
14.6 1969 г.

Кафедра
молекулярной физики

УДК 519.217

Б. В. АЛЕШИН

О КОЛЕБАНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ МАЛЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, гамильтониан которой зависит от медленно меняющихся параметров $x=(x_1, \dots, x_n)$ и равен

$$H=\frac{p^2}{2m(x)}+V(x, q).$$

Пусть на систему воздействуют малые детерминированные и случайные возмущения, такие, что поведение возмущенного движения описывается системой стохастических уравнений Ито вида:

$$\begin{gathered}
dq=\left[\frac{p}{m(x)}-\varepsilon f^{(p)}(x, q, p)\right]dt+\sqrt{\varepsilon}\,[\sigma_{11}(x, q, p)\,dW_1+\sigma_{12}(x, q, p)\,dW_2],\\
dp=[-Q(x, q)+\varepsilon f^{(q)}(x, q, p)]\,dt+\sqrt{\varepsilon}\,[\sigma_{21}(x, q, p)\,dW_1+\sigma_{22}(x, q, p)\,dW_2],\\
dx=\varepsilon X(x, q, p)\,dt.
\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $Q(x, q)=\dfrac{\partial V}{\partial q}$, $X(x, q, p)$ — n-мерная векторная функция, $W_1(t)$ и $W_2(t)$ — независимые винеровские процессы, $MW_i=0$, $MW_i^2=t$, ε — малый параметр, $\varepsilon\in[0, \varepsilon_0]$.

Предположим, что невозмущенное движение системы является чисто периодическим, с периодом T_0, зависящим от параметров x и начальных условий, причем координата q на одном периоде имеет один максимум F_1 и один максимум F_2. (Можно рассмотреть и случай, когда невозмущенное движение является вращательным.) В силу этих предположений невозмущенное движение можно представить в виде $q=q(x, F_1, \psi)$, $p=p(x, F_1, \psi)$, где q и p периодически, с периодом 2π, зависят от фазы $\psi=\dfrac{2\pi}{T_0}(t-t_0)+{}$ $+h$, h — произвольная постоянная, F_1 — вторая произвольная постоянная, за которую в дальнейшем мы будем принимать одно из возможных максимальных отклонений системы от положения равновесия, $x=\text{const}$.

Очевидно:

$$V(x, F_1)\equiv V(x, F_2)=\frac{p^2}{2m(x)}+V(x, q).\tag{2}$$

Если p и q — случайные процессы, удовлетворяющие системе (1), то соотношение (2) для любого момента времени t определяет два возможных, уже случайных максимальных отклонения F_1 и F_2 от положения равновесия.

В настоящей заметке приведены усредненные стохастические уравнения для F_1 и F_2 в случае возмущенного движения системы, полученные на основании принципа усреднения (см. [1], [2]). Аналогичные вопросы рассматривались в [3] и [4].

В системе (1) сделаем замену переменных, перейдя от x, q, p к переменным x, F_1, ψ. В новой системе «медленными» переменными будут F_1 и x. Воспользовавшись формулой Ито (см. [5], стр. 506) и (2), можно получить следующие стохастические уравнения:

$$\begin{aligned}
dF_1={}&\frac{\varepsilon}{Q(x, F_1)}A(x, q, p)\Big|_{\substack{q=q(x,F_1,\psi)\\ p=p(x,F_1,\psi)}}dt+{}\\
&+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{Q(x, F_1)}[B_1(x, q, p)\,dW_1+B_2(x, q, p)\,dW_2]\Big|_{\substack{q=q(x,F_1,\psi)\\ p=p(x,F_1,\psi)}},
\end{aligned}\tag{3}$$

$$dx = \varepsilon X(x, q, p)\Big|_{\substack{q=q(x, F_1, \psi)\\ p=p(x, F_1, \psi)}} dt,$$

где

$$A(x, q, p) = f^{(q)} \frac{p}{m} - f^{(p)} Q - \frac{1}{m} X \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_q^{F_1} [m(x) Q(x, y)] \, dy + \tag{4}$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m} \left(1 - \frac{2}{Q^2(x, F_1)} \int\limits_q^{F_1} Q(x, y) \, dy \right) a_{11} - 2 \frac{Q(x, q)}{Q(x, F_1)} \frac{\partial Q(x, F_1)}{\partial F_1} a_{12} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q(x, q)}{\partial q} - \frac{Q^2(x, q)}{Q^2(x, F_1)} \frac{\partial Q(x, F_1)}{\partial F_1} \right) a_{22} \right], \quad a_{ik} = \sigma_{i1}\sigma_{k1} + \sigma_{i2}\sigma_{k2},$$

$$B_1 = Q(x, q)\sigma_{11} + \frac{p}{m}\sigma_{21}, \quad B_2 = Q(x, q)\sigma_{12} + \frac{p}{m}\sigma_{22}.$$

В группе уравнений (3) согласно [1] можно произвести усреднение. Обозначим усредненные значения F_1, F_2, x через $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{x}$, тогда

$$d\bar{F}_1 = \frac{\varepsilon}{Q(x, \bar{F}_1)} \left[\frac{1}{T_0} \int\limits_0^{T_0} A(\bar{x}, q, p) \Big|_{\substack{q=q(\bar{x}, \bar{F}_1, \psi)\\ p=p(\bar{x}, \bar{F}_1, \psi)}} dt \right] dt +$$

$$+ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{Q(\bar{x}, \bar{F}_1)} \left[\frac{1}{T_0} \int\limits_0^{T_0} (B_1^2 + B_2^2) \Big|_{\substack{q=q(\bar{x}, \bar{F}_1, \psi)\\ p=p(\bar{x}, \bar{F}_1, \psi)}} dt \right]^{1/2} dW, \tag{5}$$

$$d\bar{x} = 2 \left[\frac{1}{T_0} \int\limits_0^{T_0} X(\bar{x}, q, p) \Big|_{\substack{q=q(\bar{x}, \bar{F}_1, \psi)\\ p=p(\bar{x}, \bar{F}_1, \psi)}} dt \right] dt.$$

Заметим, что усреднение по времени можно заменить интегрированием по q на отрезке невозмущенной траектории, соответствующем интервалу $\Delta t = T_0$. (Знание траектории невозмущенного движения не является обязательным.) При этом надо учитывать, что

$$\dot{q} = \pm m^{-1/2} \left[2 \int\limits_q^{F_1} Q(x, y) \, dy \right]^{1/2},$$

где знак + берется в случае, когда q меняется от F_2 до F_1, а знак — — в интервале от F_1 до F_2. Выпишем усредненное значение $\bar{A}(\bar{x}, \bar{F}_1)$ в (5). (Усредненное значение стохастической части уравнения получается аналогично.)

$$\bar{A}(\bar{x}, \bar{F}_1) = \left(2m^{1/2} \int\limits_{\bar{F}_2}^{\bar{F}_1} dq \left(2 \int\limits_q^{\bar{F}_1} Q(\bar{x}, y) \, dy \right)^{-1/2} \right)^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_{\bar{F}_2}^{\bar{F}_1} \left\{ \sum_{i=1}^{2} (-1)^i f^{(q)} \left(\bar{x}, q, (-1)^i \left(2m \int\limits_q^{\bar{F}_1} Q(\bar{x}, y) \, dy \right)^{1/2} \right) - \right.$$

$$- m^{1/2} \left(2 \int\limits_q^{\bar{F}_1} Q(\bar{x}, y) \, dy \right)^{-1/2} Q(\bar{x}, q) \sum_{i=1}^{2} f^{(p)} \left(\bar{x}, q, (-1)^i \left(2m \int\limits_q^{\bar{F}_1} Q(\bar{x}, y) \, dy \right)^{1/2} \right) -$$

$$- \int\limits_q^{\bar{F}_1} \frac{\partial}{\partial x} [mQ(\bar{x}, y)] \, dy \left(2m \int\limits_q^{\bar{F}_1} Q(\bar{x}, y) \, dy \right)^{-1/2} \sum_{i=1}^{2} X \left(\bar{x}, q, (-1)^i \left(2m \int\limits_q^{\bar{F}_1} Q(\bar{x}, y) \, dy \right)^{1/2} \right) +$$

$$+\int\limits_{q}^{\bar F}\left(1-\frac{2}{Q^2(F_1,\bar x)}\int\limits_{q}^{\bar F_1} Q(\bar x, y)\,dy\right)\left(2m\int\limits_{q}^{\bar F_1} Q(\bar x, y)\,dy\right)^{-1/2}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{2}(-1)^i a_{11}\left(\bar x, q, (-1)^i\left(2m\int\limits_{q}^{\bar F_1} Q(\bar x, y)\,dy\right)^{1/2}\right)-\frac{Q(\bar x, q)}{Q^2(\bar x, F_1)}\times$$

$$\times\frac{\partial Q(\bar x, \bar F_1)}{\partial \bar F_1}m^{1/2}\left(2\int\limits_{q}^{\bar F_1} Q(\bar x, y)\,dy\right)^{-1/2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i a_{1,2}\left(\bar x, q, (-1)^i\times\right.$$

$$\left.\times\left(2m\int\limits_{q}^{\bar F_1} Q(\bar x, y)\,dy\right)^{1/2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q(\bar x, q)}{\partial q}-\frac{Q^2(\bar x, q)}{Q^2(\bar x, F_1)}\frac{\partial Q(\bar x, \bar F_1)}{\partial F_1}\right)m^{1/2}\times$$

$$\times\left(2\int\limits_{q}^{\bar F_1} Q(\bar x, y)\,dy\right)^{-1/2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i a_{22}\left(\bar x, q, (-1)^i\left(2m\int\limits_{q}^{\bar F_1} Q(\bar x, y)\,dy\right)^{1/2}\right\}dq\left(\int\limits_{\bar F_2}^{\bar F_1} Q(\bar x, y)\,dy\right)=0. \tag{6}$$

Из принципа усреднения вытекает, что распределение вероятностей величины $F_1(F_2)$ при достаточно малых ε будет сколь угодно близко к распределению вероятностей величины $\bar F_1(\bar F_2)$ на интервале времени порядка $\frac{1}{\varepsilon}$.

Для дальнейшего анализа можно было бы по системе стохастических уравнений (5) выписать уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова для переходной вероятности усредненного процесса. Однако в некоторых случаях усредненные уравнения позволяют находить искомые величины непосредственно. Возьмем для примера систему вида:

$$\ddot y+(2\varepsilon\lambda(x)+\sqrt{\varepsilon}\,\xi)\,\dot y+k^2\,\mathrm{sgn}\,y=0, \qquad \dot x=\varepsilon. \tag{7}$$

Здесь ξ — процесс типа «белого шума»; $k=\mathrm{const}$. Уравнение (7) будем интерпретировать как систему стохастических уравнений Ито. Положив $y=q$, $\dot y=p$, получим

$$dq=p\,dt,$$

$$dp=[-k^2\,\mathrm{sgn}\,q-2\varepsilon\lambda(x)\,p]\,dt-\sqrt{\varepsilon}\,p\,dW,$$

$$dx=\varepsilon\,dt.$$

Применение формул (5) и (6) позволяет получить следующее выражение для логарифма F. (При этом учитывается, что $F=\bar F_1=-F_2$.)

$$\ln\frac{\bar F(\tau)}{F(0)}=-\frac{1}{3}\left[4\int\limits_{0}^{\tau}\lambda(s)\,ds+\frac{\tau}{5}\right]+\frac{2}{\sqrt{5}}[W(\tau)-W(0)].$$

Здесь $\tau=\varepsilon t$; $F(0)$ — значение F при $t=0$, определяемое начальными условиями, $W(\tau)-W(0)$ — приращение винеровского процесса.

Автор приносит благодарность В. М. Волосову и Б. И. Моргунову за советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хасьминский Р. З. «Проблемы передачи информации», т. 4, вып. 2, 1968, стр. 86—87.
2. Волосов В. М. «Успехи математич. наук», вып. 6, 1962.
3. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., «Советское радио», 1961.

4. Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г. Применение принципа усреднения к исследованию влияния случайных воздействий на колебательные системы. В сб.: «Математическая физика». Киев, «Наукова думка», вып. 3, 1967.
5. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
23.7 1969 г.

Кафедра
математики

УДК 521.21

М. П. БОРИС

АБСОЛЮТНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЮНОНЫ ОТ ВСЕХ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ

В настоящей работе вычисляются абсолютные возмущения первого порядка в движении малой планеты № 3 (Юнона) от всех больших планет по методу Хилла с помощью электронной вычислительной машины.

Применение современной быстродействующей вычислительной техники в области небесной механики позволило значительно сократить сроки решения таких задач, как построение аналитических теорий движения планет, которые требовали многих лет кропотливых вычислений [1]. Так, построение аналитических теорий движения планет связано с большим объемом работы. В связи с этим большое значение имела работа Н. Г. Полозовой «Применение электронных счетных машин к построению аналитических теорий движения планет» [2], в которой показано, что решение данной задачи на электронных машинах возможно.

В данной заметке методика Хилла применяется к построению аналитической теории движения Юноны с помощью электронных цифровых вычислительных машин М-20 и БЭСМ-4. Поскольку возмущения первого порядка от больших планет аддитивны, в работе определяются возмущения первого порядка в движении Юноны отдельно от каждой планеты, затем результаты объединяются.

Метод Хилла основывается на уравнениях возмущенного движения малой планеты $p(x, y, z)$ в прямоугольной системе координат с началом в центре Солнца:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k^2x}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k^2y}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{d^2t^2}+\frac{k^2z}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial z},$$

где масса Солнца принята за единицу, масса малой планеты равна нулю, а R — возмущающая функция, определяется равенствами

$$R=k^2m'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r\cos\psi}{r'^2}\right),$$

$$\Delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$r\cdot r'\cdot\cos\psi=xx'+yy'+zz'.$$

Штрихи относятся к координатам возмущающей планеты, чья масса равна m'; k — постоянная Гаусса.

Метод Хилла предполагает введение в качестве независимого переменного на времени, а невозмущенной истинной аномалии, кроме того, за основную координатную плоскость принимается плоскость невозмущенной орбиты малой планеты. Все это обеспечивает простоту данного метода и существенно облегчает уравнения, определяющие возмущения первого порядка относительно возмущающих масс.

Положим

$$X=\frac{r^4}{k^2p}\cdot\frac{\partial R}{\partial r}, \qquad Y=\frac{r^2}{k^2p}\cdot\frac{\partial R}{\partial \lambda}, \qquad Z=\frac{r^3}{k^2p}\cdot\frac{\partial R}{\partial z}.$$