4. Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г. Применение принципа усреднения к исследованию влияния случайных воздействий на колебательные системы. В сб.: «Математическая физика». Киев, «Наукова думка», вып. 3, 1967.
5. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.

Поступила в редакцию
23.7 1969 г.

Кафедра
математики

УДК 521.21

М. П. БОРИС

АБСОЛЮТНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЮНОНЫ ОТ ВСЕХ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ

В настоящей работе вычисляются абсолютные возмущения первого порядка в движении малой планеты № 3 (Юнона) от всех больших планет по методу Хилла с помощью электронной вычислительной машины.

Применение современной быстродействующей вычислительной техники в области небесной механики позволило значительно сократить сроки решения таких задач, как построение аналитических теорий движения планет, которые требовали многих лет кропотливых вычислений [1]. Так, построение аналитических теорий движения планет связано с большим объемом работы. В связи с этим большое значение имела работа Н. Г. Полозовой «Применение электронных счетных машин к построению аналитических теорий движения планет» [2], в которой показано, что решение данной задачи на электронных машинах возможно.

В данной заметке методика Хилла применяется к построению аналитической теории движения Юноны с помощью электронных цифровых вычислительных машин М-20 и БЭСМ-4. Поскольку возмущения первого порядка от больших планет аддитивны, в работе определяются возмущения первого порядка в движении Юноны отдельно от каждой планеты, затем результаты объединяются.

Метод Хилла основывается на уравнениях возмущенного движения малой планеты $p(x, y, z)$ в прямоугольной системе координат с началом в центре Солнца:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k^2x}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k^2y}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{d^2t^2}+\frac{k^2z}{r^3}=\frac{\partial R}{\partial z},$$

где масса Солнца принята за единицу, масса малой планеты равна нулю, а R — возмущающая функция, определяется равенствами

$$R=k^2m'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r\cos\psi}{r'^2}\right),$$

$$\Delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$r\cdot r'\cdot\cos\psi=xx'+yy'+zz'.$$

Штрихи относятся к координатам возмущающей планеты, чья масса равна m'; k — постоянная Гаусса.

Метод Хилла предполагает введение в качестве независимого переменного на времени, а невозмущенной истинной аномалии, кроме того, за основную координатную плоскость принимается плоскость невозмущенной орбиты малой планеты. Все это обеспечивает простоту данного метода и существенно облегчает уравнения, определяющие возмущения первого порядка относительно возмущающих масс.

Положим

$$X=\frac{r^4}{k^2p}\frac{\partial R}{\partial r},\qquad Y=\frac{r^2}{k^2p}\frac{\partial R}{\partial \lambda},\qquad Z=\frac{r^3}{k^2p}\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Планета	δλ		δβ		$10^8\delta r$ а. е.	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin
ЮПИТЕР	$i=2$ $i'=2$ —79″,5258456	$i=2$ $i'=3$ +230″,085604	$i=0$ $i'=1$ +6″,62439939	$i=2$ $i'=-1$ +0″,262539692	$i=1$ $i'=3$ —34304,9482	$i=0$ $i'=2$ —18406,3644
МАРС	$i=2$ $i'=2$ —0,584699140	$i=2$ $i'=0$ +0,0203287166	$i=2$ $i'=-2$ —0,683571443	$i=2$ $i'=-1$ —0,0166992036	$i=1$ $i'=-1$ +301,544463	$i=3$ $i'=-2$ —2208,51682
САТУРН	$i=0$ $i'=1$ +5,15831011	$i=0$ $i'=2$ +5,55643818	$i=2$ $i'=0$ +0,307193496	$i=1$ $i'=2$ —0,647452360	$i=0$ $i'=1$ +2958,01505	$i=0$ $i'=2$ +3452,61184
ЗЕМЛЯ	$i=1$ $i'=1$ +0,109489514	$i=1$ $i'=-1$ —0,110480667	$i=1$ $i'=-1$ +0,0223619526	$i=2$ $i'=-1$ —0,0169565249	$i=1$ $i'=1$ —101,938739	$i=2$ $i'=-1$ +122,043481
ВЕНЕРА	$i=2$ $i'=-1$ +0,0859769541	$i=2$ $i'=-1$ —0,0248099560	$i=1$ $i'=1$ —0,0101036202	$i=1$ $i'=1$ +0,0127421968	$i=2$ $i'=-1$ +75,8764952	$i=3$ $i'=-1$ +111,288148
УРАН	$i=2$ $i'=1$ +0,0140813994	$i=1$ $i'=3$ +0,0169992607	$i=0$ $i'=1$ +0,0160221740	$i=0$ $i'=0$ +0,0145711814	$i=1$ $i'=2$ 229,48074	$i=1$ $i'=2$ 258,974710
НЕПТУН	$i=1$ $i'=1$ 0,00833089387	$i=1$ $i'=1$ 0,0389895865	$i=1$ $i'=2$ 0,0147524806	$i=1$ $i'=2$ 0,0203903094	$i=3$ $i'=2$ +11,1232773	$i=1$ $i'=2$ +79,4809194
ПЛУТОН	$i=0$ $i'=0$ +0,00134116669	$i=0$ $i'=0$ 0,00345089423	$i=0$ $i'=0$ +0,000131389609	$i=0$ $i'=0$ +0,00100829941	$i=0$ $i'=1$ —2,06148930	$i=0$ $i'=-1$ —2,33312761
МЕРКУРИЙ	$i=1$ $i'=1$ +0,000543420228	$i=2$ $i'=0$ —0,00686888217	$i=1$ $i'=-1$ +0,000107321467	$i=1$ $i'=1$ —0,000445504094	$i=0$ $i'=1$ —55,5918455	$i=3$ $i'=-1$ —2,31045366

Тогда окончательно получим для возмущений радиуса-вектора широты над плоскостью эллиптической орбиты и долготы в плоскости эллиптической орбиты малой планеты:

$$\delta r = \int \left[X + 2r^3 \int r^{-2} \left(X \frac{e \sin v}{p} + Y \right) dv \right] \sin (\bar{v} - v)\, dv,$$

$$\delta \lambda = \int \left[Y dv - 2 \frac{\delta r}{r} \right] dv,$$

$$\delta \beta = \int Z \sin (\bar{v} - v)\, dv.$$

Для определения возмущений δr, $\delta\lambda$, $\delta\beta$ необходимо разложить X, Y, Z в ряды Фурье по аргументам v и θ', где

$$\theta' = \frac{\nu'}{\nu} v + c' - \frac{\nu'}{\nu} c,$$

ν, ν' — средние движения возмущаемой и возмущающей планет, c, c' — соответственные средние аномалии в начальную эпоху.

При разложении в ряды практически более удобно разложение по v и w', где $w' = \theta' - v$.

Для получения возмущений первого порядка необходимо выразить X, Y, Z через содержащиеся в них эллиптические значения переменных. Разложение X, Y, Z в ряды Фурье по аргументам v и w' выполняется на основе гармонического анализа по ряду частных значений функций с последующей заменой w' на θ'.

Если $2n$ и $2n'$ — число точек деления окружности по аргументам v и w' соответственно при численном разложении функции в ряд, то по $4nn'$ частных значений величины X, Y, Z могут быть разложены в ряды следующего вида:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{i'=-n'}^{n'} [K_{ii'}^{(c)} \cos (iv + i'w) + K_{ii'}^{(s)} \sin (iv + i'w')].$$

Процесс такого разложения хорошо известен. С помощью быстродействующей электронной счетной машины получены коэффициенты рядов искомых возмущений, которые выводятся из машины в определенной последовательности: выводятся на печать коэффициенты косинусов в порядке возрастания индекса i и затем коэффициенты синусов (для каждого значения i второй индекс i' изменяется от $-n'$ до n', где $2n'$ — число точек деления окружности по аргументу w').

Вычисление абсолютных возмущений требует выполнения различных операций над рядом с большим количеством членов, в связи с чем контроль производимых вычислений осуществлялся различными способами: с помощью контрольных формул и путем двойного просчета.

Формальная точность при вычислении величин $\delta\lambda$, $\delta\beta$ равна $0{,}''00$, а величины δr — 10^{-8} а. е., или 1,5 *км*. Приведем некоторые из окончательных результатов.

В основу вычисления возмущений Юноны от больших планет были положены элементы, отнесенные к эклиптике и равнодействию 1950.0. Наиболее трудоемкой частью работы оказалось вычисление возмущений Юноны от наиболее близких к ней больших планет Марса и Юпитера, потребовавшее для наибольшей точности вычислений существенного увеличения числа точек деления окружности по обоим аргументам.

В таблице приводится лишь небольшая часть членов-коэффициентов при косинусах и синусах углов, кратных v и w' в разложениях возмущений δr, $\delta\lambda$ и $\delta\beta$.

Для сохранных коэффициентов характерна наибольшая величина их по отношению к другим $K_{ii'}^{(c)}$, $K_{ii'}^{(s)}$ соответственно.

Настоящая статья в полном объеме будет напечатана в «Бюллетене ИТА».

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскурин В. Ф. Теория движения Цереры. «Труды ИТА», 2, 1952.
2. Полозова Н. Г. «Бюллетень ИТА», 7, № 8 (91), 1960.

Поступила в редакцию
29.10 1969 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии