ность возрастает. Это вызвано тем, что у неполностью упорядочивающегося образца наряду с упорядоченной фазой существуют остатки неупорядоченной фазы.

В заключение выражаем благодарность проф. К. П. Белову за научное руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов К. П. и др. «Изв. АН СССР», сер. физич., 22, № 10, 1282, 1958.
2. Mc. Guire, Greenwald S. W. Solid State Phys. in Electronic and telecomman. 3 (1), 50—71, 1960.
3. Белов К. П., Педько А. В. ЖЭТФ, 39, 1, 1960.

Поступила в редакцию
27.6 1969 г.

Кафедры
общей физики для биологов

УДК 530.12 : 531.51

Р. Ф. ПОЛИЩУК

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОЛЕЙ ТЯГОТЕНИЯ ПО ПЕТРОВУ И ХРОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Система отсчета определяется в некоторой области V_4 как конгруэнция линий времени [1], касательными к которым являются единичные времениподобные векторы $u^\alpha = dx^\alpha/ds$. При этом тензор Вейля $C_{\mu\alpha\nu\beta}$ расщепляется на 2 тензора с 5 существенными составляющими у каждого

$$U_{\mu\nu} = C_{\mu\alpha\nu\beta}u^\alpha u^\beta, \quad V_{\mu\nu} = {}^*C_{\mu\alpha\nu\beta}u^\alpha u^\beta,$$

$$^*C_{\mu\alpha\nu\beta} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\alpha\rho\sigma}C^{\rho\sigma}_{\nu\beta}, \quad U_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}(U_{\mu\nu} - U_{\nu\mu}) = 0,$$

$$V_{[\mu\nu]} = 0, \quad \operatorname{Sp} U = \operatorname{Sp} V = 0$$

(греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, 0, латинские — 1, 2, 3). Это расщепление, очевидно, инвариантно относительно внутренних преобразований координат в данной системе отсчета $\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^\beta)$, $\partial\tilde{x}^i/\partial x^0 = 0$.

Как показал А. Л. Зельманов, тензор Римана расщепляется на 3 хронометрически-инвариантных тензора (х. и. тензора) — см. [2]. Очевидно, в полугеодезической системе отсчета (равенства со звездочкой) они имеют вид

$$x_{ij} \stackrel{*}{=} \partial D_{ij}/\partial t - D_{il}D^l_j, \quad Y_{kij} \stackrel{*}{=} \nabla_j D_{ik} - \nabla_k D_{ij},$$

$Z_{iklj} \stackrel{*}{=} D_{ik}D_{lj} - D_{il}D_{kj} - C_{iklj}$; $2D_{ik} \stackrel{*}{=} -\partial g_{ik}/\partial t$; D_{ik}, C_{iklj} — х. и. тензоры скоростей деформации и кривизны данного пространства системы отсчета.

Четырехмерное представление тензоров X_{ik}, Y_{lk}, дуального Y_{kij}, Z_{ik} дважды дуального Z_{iklj} имеет вид [3]

$$X_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu\beta}u^\alpha u^\beta, \quad Y_{\mu\nu} = {}^*R^*_{\mu\alpha\nu\beta}u^\alpha u^\beta, \quad Z_{\mu\nu} = {}^*R^*_{\mu\alpha\nu\beta}u^\alpha u^\beta.$$

В пустоте $U_{\mu\nu} = X_{\mu\nu} = -Z_{\mu\nu}$, $V_{\mu\nu} = Y_{\mu\nu}$. Тензор $U_{\mu\nu}$ определяется 3×3 матрицей (U_{ik}). В орторепере $(C_{\mu\alpha\nu\beta}) = \begin{pmatrix} U & iV \\ iV & U \end{pmatrix}$. Мы ввели координату $x^0 = it$ и записали тензор четной (четвертой) валентности в виде матрицы (6×6). Ее характеристическое уравнение имеет вид [6]

$$-\left| C_{\mu\alpha\nu\beta} - \lambda g_{\mu\alpha\nu\beta} \right| = \lambda^3 - 3I_1\lambda - 2I_2 = 0,$$

$$g_{\mu\alpha\nu\beta} \equiv g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\beta}g_{\alpha\nu}, \quad I_1 = \frac{1}{48}\left(C_{\mu\alpha\nu\beta}C^{\mu\alpha\nu\beta} - iC_{\mu\alpha\nu\beta}{}^*C^{\mu\alpha\nu\beta}\right),$$

$$I_2 = \frac{1}{96}\left(C_{\mu\alpha\nu\beta}C^{\nu\beta\rho\sigma}C^{\mu\alpha}_{\rho\sigma} + iC_{\mu\alpha\nu\beta}C^{\nu\beta\rho\sigma}{}^*C^{\mu\alpha}_{\rho\sigma}\right).$$

Оно, очевидно, совпадает с таковым для комплексной симметричной матрицы $A=U+Vi$. Получаем 3 комплексных корня

$$\lambda_{1,2,3}=\varepsilon_{1,2,3}\sqrt[3]{I_2+\sqrt{d}}+\varepsilon_1\pm i\sqrt{3/2}\sqrt[3]{I_2-\sqrt{d}},$$

$$d=I_2^2-I_1^3,\quad \varepsilon_1=1,\quad \varepsilon_{2,3}=-1/2\pm i\sqrt{3/2},$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,\quad \lambda_i=\alpha_i+i\beta_i.$$

В силу теоремы Гамильтона — Кэли $A^3-3I_1\lambda-2I_2E=\prod_i(A-\lambda_iE)=0$. Решения этого уравнения разделяются на 3 класса: $a\,(d\neq 0)$, $b\,(d=0,\ I_1\neq 0)$, $c\,(I_1=I_2=0)$. Для класса a можем получить $A=\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$. Для класса b: $(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)^2=0$. Комплексное эвклидово пространство E_3^+ разбивается на 2 инвариантных подпространства, и в соответствующем базисе A квазидиагональна. Ящичек 1×1 имеет вид λ_1, а для ящичка 2×2 получаем $A-\lambda_2E=0$ и $A-\lambda_2E=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\equiv A_N\neq 0$, $A_N^2=0$, откуда $A_N=\alpha\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$; α — любое комплексное число, примем $\alpha=1$. Класс c: $A^3=0$, т. е. трем индексам нильпотентности соответствуют три матрицы — нулевая; A_N, дополненная нулями (обозначим ее $A_{\mathrm{II}\,d}$); и $A_{\mathrm{III}}=\begin{pmatrix}. & 1 & i\\ 1 & . & .\\ i & . & .\end{pmatrix}$. Последнюю матрицу получим, приняв $A_{\mathrm{III}}^2=A_{\mathrm{II}d}$. Связь этих классов с типами Петрова очевидна.

В некотором базисе в E_3^+ матрицы U и V имеют канонический вид. Этот базис определяет в V_4 каноническую тетраду с однозначно определенным временноподобным вектором, соответствующим некоторой системе отсчета. Систему отсчета, в которой тензоры расщепления можно одновременно привести к каноническому виду внутренними преобразованиями координат, назовем канонической системой отсчета.

Из условия $A^2=(U+iV)^2=0$ для типа IId получаем антикоммутативность U и V. Для пространств T_3 (тип III) $UVU=VUV=0$, а для T_1—$UV=VU$. (Для типа II $(UV-VU)^2$ идемпотнетна.) Отсюда получаем тензорные соотношения:

$$C_{\rho\beta\alpha[\mu}{}^*C_{\nu]\gamma\delta\sigma}\,g^{\rho\sigma}u^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta=0\quad (T_1),$$

$$C_{\rho\beta\alpha(\mu}{}^*C_{\nu)\gamma\delta\sigma}\,g^{\rho\sigma}u^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta=0\quad (\mathrm{II}\,d),$$

$$C_{\mu\alpha\sigma\beta}{}^*C_{\lambda\xi\tau\eta}\,C_{\nu\gamma\rho\delta}\,g^{\lambda\sigma}g^{\tau\rho}u^\alpha u^\beta u^\gamma u^\delta u^\xi u^\eta=0\quad (\mathrm{III})\ (A).$$

Мы можем, например, утверждать, что необходимым и достаточным условием принадлежности тензора Вейля в данной области к типу III является наличие в ней такой системы отсчета, что справедливо (A), и т. д. (Тип II проще получить методом исключения, типы I и Id можно различить по дискриминанту d.) Наоборот, если в данной области тензор Вейля относится к типу III, то уравнение (A) определяет конгруенцию линий времени (иначе говоря, каноническую систему отсчета) с заданным касательным вектором u^α (с точностью до одного лоренцева вращения с параметром поворота σ, входящим в матрицы U и V).

Для предельного перехода $u^\alpha\to l^\alpha$ (l^α — изотропный главный вектор Римана) для соответствующего комплексного угла φ имеем $\varphi\to i\infty$ и $\sigma\to 0$, т. е. расщепление с помощью вектора l^α для пространств T_2, T_3 совпадает с расщеплением при помощи канонического вектора u^α для пространств T_1 (упрощаются и тензорные соотношения). Соответствующую конгруенцию изотропных линий назовем вырожденной канонической системой отсчета.

Рассмотрим линейное ковариантное приближение для гравитационного поля в вакууме в окрестности данной мировой точки P в локально галилеевой канонической системе, полугеодезической в области. Тогда в окрестности P или даже в окрестности координатной линии x' имеем с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$g_{0\alpha}=\delta_{0\alpha},\ -g_{ik}=\delta_{ik}+2\int D_{ik}dt,\ D_{ik}(P)=0,$$

$$\nabla_m=\partial/\partial x^m,\ A=\dot D+D^2+i\omega D=\dot D+i\omega D,\ \omega=(\varepsilon^{ijk}\nabla_k).$$

Используя канонический вид матрицы A и полагая для простоты $D_{ij,k}(P)=0$ для нулевых клеток в A (обобщение здесь тривиально), получаем локальную классификацию по тензору скоростей деформации выделенной системы отсчета

$$D_{\mathrm{I}}=\begin{pmatrix} \alpha_1 t & az & (a-\beta_1)\,y \\ az & \alpha_2 t & (a+\beta_1)\,y \\ (a-\beta_1)\,y & (a+\beta_1)\,y & \alpha_3 t \end{pmatrix}, \quad a=D_{12,3}\ (P),$$

$$D_{\mathrm{II}d}=diag\,(0,\ t-x,\ -t+x) \text{ при } D_{12,2}=D_{13,3}=0,$$

$$D_{\mathrm{II}d}=\begin{pmatrix} \cdot & y & -z \\ y & t & \cdot \\ -z & \cdot & -t \end{pmatrix} \text{ при } D_{22,1}=D_{33,1}=0,$$

$$D_{\mathrm{III}}=\begin{pmatrix} \cdot & t-x & \cdot \\ t-x & \cdot & z \\ \cdot & z & \cdot \end{pmatrix} \text{ при } D_{11,2}=-D_{33,2}=0,$$

$$D_{\mathrm{III}}=\begin{pmatrix} y & t & \cdot \\ t & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -y \end{pmatrix} \text{ при } D_{12,1}=D_{32,3}=0,$$

$$D_{\mathrm{II}}=D_{\mathrm{I}d}+D_{\mathrm{II}d}, \quad (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3=t,\ x,\ y,\ z).$$

Для поля Шварцшильда, например, $D=diag\left(\frac{2mt}{r^3},\ -\frac{mt}{r^3},\ -\frac{mt}{r^3}\right)$, т. е. мы имеем растяжение по направлениям к центральному телу и от него и половинное симметричное сжатие в ортогональной плоскости. Для типа IId получаем, в частности, локально плоскую волну деформации и трехмерной кривизны (ведь $X=-Z$), а для типа III — волну поперечно-продольного переменного сдвига в плоскости xy, распространяющуюся вдоль Ox, а в остальных координатных плоскостях — сдвиги вдоль Oy, постоянные на фронте волны и соответствующие некоторому повороту.

В заключение выражаю благодарность А. Л. Зельманову и Н. В. Мицкевичу за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельманов А. Л. ДАН СССР, 107, 815, 1956.
2. Захаров В. Д. В сб.: «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М., Атомиздат, 1966, стр. 126.
3. Misra R. M. Amer. J. Phys., 35, No. 5, 394—397, 1967.
4. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. М., Физматгиз, 1961.
5. Synge J. L. Comm. Dubl. Adv. Studies. Ser A, No. 15, 1964.
6. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
5.11 1969 г.

ГАИШ, ВНИИОФИ

Х. К. ДЕЛЬ ПРАДО СЕГУРА

ХРОНОМЕТРИЧЕСКИ-ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ВТОРОГО НАЧАЛА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

В рамках общей теории относительности в качестве первого начала термодинамики служит закон сохранения энергии-импульса [1]:

$$T^{\mu\nu};\,_{\nu}=0, \tag{1}$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса.

Второе начало термодинамики можно записать в виде (ср. [1]):

$$S^{\mu};\,_{\mu}\delta W\geqslant\frac{\delta Q}{\mathrm{T}}, \tag{2}$$