

Используя канонический вид матрицы A и полагая для простоты $D_{ij,h}(P)=0$ для нулевых клеток в A (обобщение здесь тривиально), получаем локальную классификацию по тензору скоростей деформации выделенной системы отсчета

$$D_I = \begin{pmatrix} \alpha_1 t & az & (a - \beta_1) y \\ az & \alpha_2 t & (a + \beta_1) y \\ (a - \beta_1) y & (a + \beta_1) y & \alpha_3 t \end{pmatrix}, \quad a = D_{12,3}(P),$$

$$D_{II d} = \text{diag}(0, t - x, -t + x) \text{ при } D_{12,2} = D_{13,3} = 0,$$

$$D_{II d} = \begin{pmatrix} . & y & -z \\ y & t & . \\ -z & . & -t \end{pmatrix} \text{ при } D_{22,1} = D_{33,1} = 0,$$

$$D_{III} = \begin{pmatrix} . & t - x & . \\ t - x & . & z \\ . & z & . \end{pmatrix} \text{ при } D_{11,2} = -D_{33,2} = 0,$$

$$D_{III} = \begin{pmatrix} y & t & . \\ t & . & . \\ . & . & -y \end{pmatrix} \text{ при } D_{12,1} = D_{32,3} = 0,$$

$$D_{II} = D_{Id} + D_{II d}, \quad (x^0, x^1, x^2, x^3 = t, x, y, z).$$

Для поля Шварцшильда, например, $D = \text{diag}\left(\frac{2mt}{r^3}, -\frac{mt}{r^3}, -\frac{mt}{r^3}\right)$, т. е. мы имеем растяжение по направлениям к центральному телу и от него и половинное симметричное сжатие в ортогональной плоскости. Для типа $II d$ получаем, в частности, локально плоскую волну деформации и трехмерной кривизны (ведь $X = -Z$), а для типа III — волну поперечно-продольного переменного сдвига в плоскости xy , распространяющуюся вдоль Ox , а в остальных координатных плоскостях — сдвиги вдоль Oy , постоянные на фронте волны и соответствующие некоторому повороту.

В заключение выражаю благодарность А. Л. Зельманову и Н. В. Мицкевичу за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельманов А. Л. ДАН СССР, **107**, 815, 1956.
2. Захаров В. Д. В сб.: «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М., Атомиздат, 1966, стр. 126.
3. Misner R. M. Amer. J. Phys., **35**, No. 5, 394—397, 1967.
4. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. М., Физматгиз, 1961.
5. Synge J. L. Comm. Dubl. Adv. Studies. Ser A, No. 15, 1964.
6. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
5.11 1969 г.

ГАИШ, ВНИИОФИ

Х. К. ДЕЛЬ ПРАДО СЕГУРА

ХРОНОМЕТРИЧЕСКИ-ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ВТОРОГО НАЧАЛА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

В рамках общей теории относительности в качестве первого начала термодинамики служит закон сохранения энергии-импульса [1]:

$$T^{\mu\nu};_{\nu} = 0, \quad (1)$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса.

Второе начало термодинамики можно записать в виде (ср. [1]):

$$S^{\mu};_{\mu} \delta W \geq \frac{\delta Q}{T}, \quad (2)$$

где

$$S^\mu = \varphi dx^\mu / ds \quad (3)$$

есть по определению 4-мерный вектор плотности потока энтропии, φ — собственная плотность энтропии, dx^μ/ds — 4-мерный вектор скорости рассматриваемого элемента среды, δW — 4-мерный объем, соответствующий 3-мерному объему элемента среды в элементарный промежуток времени, δQ — количество тепла, получаемого элементом среды через границы занимаемого им объема в элементарный промежуток времени, T — температура на границах рассматриваемого элемента среды.

Общее выражение 4-мерного объема элемента δW через векторы $\delta x_{(0)}^\nu$, $\delta x_{(1)}^\nu$, $\delta x_{(2)}^\nu$ и $\delta x_{(3)}^\nu$, на которых он может быть построен, имеет вид (мы не пользуемся специальным выбором этих векторов, сделанным в [1]):

$$\delta W = \sqrt{-g} |\text{Det} | \delta x_{(\mu)}^\nu ||, \quad (4)$$

где $g = \text{Det} | g_{\mu\nu} |$, $g_{\mu\nu}$ — 4-мерный метрический тензор.

Уравнения (1) и (2) вследствие своей общей ковариантности являются наиболее общими в том смысле, что они справедливы в любых системах отсчета и при любых гравитационных полях. Вместе с тем в силу этой же общей ковариантности (4-мерной) в них не отражено различие между 3-мерным пространством и временем. Однако проведение этого различия существенно во всех конкретных применениях релятивистских уравнений. Использование формализма хронометрических инвариантов [2] позволяет ввести различие пространства и времени в самые уравнения, не уменьшая их общности.

Хронометрически-инвариантная (х. и.) формулировка закона (1) известна (см. [2]). Нашей целью является получение х. и. формулировки закона (2).

Прежде всего преобразуем выражение для δW . Обозначим через $\delta \tau_\mu$ х. и. промежуток времени, представляющий собой временную проекцию вектора $\delta x_{(\mu)}^\nu$:

$$c \delta \tau_{(\mu)} = \frac{g_{0k} dx_{(\mu)}^k}{\sqrt{g_{00}}} \quad (5)$$

(c — фундаментальная скорость). Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а латинские — значения 1, 2, 3.

Выберем векторы $\delta x_{(i)}^\nu$ пространственными ($\delta \tau_{(i)} = 0$), а вектор $\delta x_{(0)}^\nu$ временным ($\delta x_{(0)}^i = 0$). (Впрочем, достаточно одного из условий.) Тогда, опуская номер (нуль) у $\delta \tau_{(0)}$, сможем написать

$$\delta W = c \sqrt{h} \delta \tau |\text{Det} | \delta x_{(j)}^i ||, \quad (6)$$

где $h = \text{Det} | h_{ij} |$, h_{ij} — х. и. 3-мерный метрический тензор (см. [2]). Для х. и. 3-мерного элементарного объема имеем:

$$\delta V = \sqrt{h} |\text{Det} | \delta x_{(j)}^i ||. \quad (7)$$

Поэтому

$$\delta W = c \delta \tau \delta V. \quad (8)$$

Для 4-мерной дивергенции любого вектора B^μ справедливо выражение

$$B^\mu{}_{;\mu} = \frac{1}{c} \left(\frac{* \partial}{\partial t} + D \right) \frac{B_0}{\sqrt{g_{00}}} + \left(* \nabla - \frac{F_i}{c^2} \right) B^i. \quad (9)$$

B_0 и B^i — суть ковариантная временная и контравариантные пространственные составляющие вектора B^μ . Величины $B_0/\sqrt{g_{00}}$ и B^i представляют собой соответственно х. и. 3-мерный скаляр и х. и. 3-мерный вектор. Х. и. скаляр D есть след тензора скоростей деформации пространства отсчета, F_i — гравитационно-инерциальная сила, отнесенная к единице массы. Здесь и далее звездочками отмечаются х. и. операторы дифференцирования.

Обратимся к (3). Так как

$$c \frac{d\tau}{ds} = \left(1 - \frac{h_{ij} v^i v^j}{c^2} \right)^{-1/2},$$

где

$$cd\tau = \frac{g_{00}dx^0}{\sqrt{g_{00}}},$$

то

$$\frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{\Phi}{\sqrt{1 - \frac{h_{ij}v_i v_j}{c^2}}}, \quad S^i = \frac{\Phi v^i}{c \sqrt{1 - \frac{h_{ij}v_i v_j}{c^2}}}, \quad (10)$$

где S_0 и S^i суть ковариантная временная и контравариантные пространственные составляющие вектора S^μ , а $v^i = dx^i/d\tau$ есть х. и. 3-мерный вектор скорости элемента среды. Очевидно $S_0/\sqrt{g_{00}}$ есть х. и. плотность энтропии, а S^i — х. и. вектор плотности потока энтропии. Обозначая первую из этих величин через σ , имеем

$$\sigma = \frac{\Phi}{1 - \frac{h_{ij}v_i v_j}{c^2}}, \quad S^i = \frac{\sigma v^i}{c}. \quad (11)$$

Учитывая (8) — (11), получим х. и. формулировку закона (2) в виде

$$\left\{ \frac{*d\sigma}{dt} + D\sigma + \left[\nabla_i (\sigma v^i) - \frac{F_i (\sigma v^i)}{c^2} \right] \right\} \delta\tau \delta V \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (12)$$

Пользуясь х. и. оператором полной производной по времени

$$\frac{*d}{dt} = \frac{*d}{dt} + v^j \frac{*d}{dx^j},$$

вместо (12) можем написать также

$$\left\{ \frac{*d\sigma}{dt} + D\sigma + \sigma \left[* \nabla_i v^i - \frac{F_i v^i}{c^2} \right] \right\} \delta\tau \delta V \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (13)$$

В уравнениях (12) и (13) вторые члены (содержащие величину D) учитывают зависимость скорости изменения плотности энтропии от деформации системы отсчета, а величины, заключенные в прямые скобки, представляют собой физическую дивергенцию векторов σv^i и v^i . Член, содержащий F_i , которым физическая дивергенция отличается от математической, учитывает различие в темпе течения времени на границах элемента объема (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Tolman R. C. Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford, 1934.
2. Зельманов А. Л. Труды шестого совещания по вопросам космогонии. М., Изд-во АН СССР, 1959, стр. 144; Зельманов А. Л. ДАН СССР, 107, № 6, 815, 1956.

Поступила в редакцию
8.10 1969 г.

Кафедра
астрофизики