Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1970

УДК 621.375.8

П. С. ЛАНДА, Е. Ф. СЛИНЬКО

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА НА КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ПОДСТАВКЕ С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИЙ

Исследуется на устойчивость режим синхронизации встречных волн в газовом лазере, совершающем крутильные колебания. Получено выражение для ширины полосы захвата. Рассмотрено влияние флуктуаций на измеряемое значение угловой скорости. Анализируются технические флуктуации периода и амплитуды колебаний угловой скорости подставки.

Как известно [1], при малых скоростях вращения встречные волны в кольцевом лазере синхронизуются. При этом нарушается пропорциональная зависимость между угловой скоростью вращения и разностью частот генерируемых волн. Измерение малых скоростей вращения становится невозможным. В работе [2] описан способ, позволяющий существенно уменьшить полосу захвата. Для этого кольцевой лазер помещается на подставку, совершающую крутильные колебания.

Амплитуду и частоту колебаний подставки надо выбрать такими, чтобы максимальное значение разности частот резонаторов для встречных волн оказалось больше полосы синхронизации. Тогда в течение периода колебаний подставки разность фаз между волнами будет меняться, однако в отсутствие постоянной составляющей угловой скорости (или медленно меняющейся по сравнению с периодом колебаний подставки) суммарное изменение разности фаз за период колебаний равно нулю. Изменение разности фаз за период определяется лишь измеряемой постоянной составляющей угловой скорости. Поэтому, регистрируя значения разности фаз через интервалы времени, равные периоду колебаний, можно выделить эту постоянную составляющую скорости вращения.

В случае синусоидальных и пилообразных колебаний подставки [2] при определенных условиях область захвата обращается в нуль. В настоящей работе метод колебаний подставки исследован более детально. В расчетах учитывалась возможность медленных (технических) флуктуаций периода и амплитуды колебаний подставки. Эти флуктуации играют наиболее существенную роль тогда, когда полоса синхронизации в отсутствие флуктуаций оказывается близкой к нулю. Наличие флуктуаций изменяет значение ширины полосы синхронизации и влияет на ход частотной характеристики.

Расчет производится в предположении слабой связи, когда уравнение для разности фаз встречных волн можно представить в виде

$$\dot{\Psi} + \Omega_0 \sin \Psi = \Omega(\tau), \tag{1}$$

где Ω_0 — полоса синхронизации в отсутствие колебаний подставки; $\Omega(\tau)$ — переменная разность частот резонаторов для встречных волн, вызываемая вращением лазера и колебаниями подставки.

Ради простоты в уравнении (1) опущены члены, содержащие разность добротностей, так как они не имеют принципиального значения. Заметим также, что уравнение (1) справедливо, если максимальное значение суммарной разности частот $\Omega(\tau)$ не очень велико, так что выполняется условие $\max[\Omega(\tau)] \ll \Delta\omega_{\text{эфф}}$, где $\Delta\omega_{\text{эфф}}$ — эффективная ширина полосы резонатора [2].

Обозначим измеряемую постоянную разность частот, вызываемую вращением лазера Ω_1 разность частот, обусловленную колебаниями подставки $\Omega_2(\tau)$. Тогда $\Omega(\tau) = \Omega_1 + \Omega_2(\tau)$.

Уравнение (1) в общем случае не решается. Поэтому рассмотрим два частных случая, которые представляют наибольший практический интерес.

1. Колебания подставки синусоидальные, т. е. $\Omega_2(\tau) = \Omega_2 \sin \nu\tau$.

Предположим, что частота колебаний подставки достаточно велика, так что изменение разности фаз за период колебаний, обусловленное наличием постоянной составляющей Ω_1, мало, т. е. $\Omega_1 T \ll 1$, где T — период колебаний подставки.

Представляя $\Psi(\tau)$ в виде

$$\Psi(\tau) = \psi(\tau) - \frac{\Omega_2}{\nu} \cos \nu\tau, \tag{2}$$

из уравнения для разности фаз (1) получим уравнение для $\psi(\tau)$

$$\dot{\psi} = \Omega_1 - \Omega_0 \sin\left(\psi(\tau) - \frac{\Omega_2}{\nu} \cos \nu\tau\right). \tag{3}$$

В предположении малости параметров Ω_0, Ω_1 $(\Omega_0/\Omega_2 \ll 1,\ \Omega_1/\Omega_2 \ll 1)$ вычислим по методу последовательных приближений изменение разности фаз $\Delta\psi$ за период колебаний подставки. В первом приближении по малым параметрам из (2) и (3) следует

$$\Delta\psi = \psi(\tau + T) - \psi(\tau) = \Omega_1 T - \Omega_0 \int\limits_{\tau}^{\tau+T} \sin\left(\psi(\tau) - \frac{\Omega_2}{\nu} \cos \nu\tau'\right) d\tau'. \tag{4}$$

Выполнив интегрирование в (4), получим

$$\Delta\psi = \left[\Omega_1 - \Omega_0 J_0\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right) \sin \psi(\tau)\right] T. \tag{5}$$

Поскольку $\Omega_1 T \ll 1$, то $\Delta\psi \ll 1$ и уравнение (5) можно заменить дифференциальным уравнением

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \Omega_1 - \Omega_0 J_0\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right) \sin \psi. \tag{6}$$

В режиме синхронизации $\frac{d\psi}{d\tau}=0$ и фаза ψ принимает фиксированное значение ψ', связанное с Ω_1 соотношением

$$\Omega_1=\Omega_0 J_0\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)\sin\psi'. \tag{7}$$

Граница полосы синхронизации достигается при $\sin\psi'=1$, т. е.

$$\Omega_{1c}=\Omega_0 J_0\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right). \tag{8}$$

Таким образом, полоса синхронизации обращается в нуль при определенных значениях амплитуды и частоты колебаний подставки, удовлетворяющих условию $J_0\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)=0$. Такой же результат получается и при учете членов второго порядка по малым параметрам. Анализ высших приближений затруднителен ввиду возникающих математических усложнений.

Оценим амплитуду колебаний подставки Θ_0, воспользовавшись соотношением

$$\Theta_0=\frac{L\lambda}{8\pi S}\,\frac{\Omega_2}{\nu}. \tag{9}$$

Пусть периметр лазера $L=40$ *см*, площадь $S=100$ *см*^{2}, длина волны лазерного излучения $\lambda=0{,}63$ *мк*. Тогда

$$\Theta_0=10^{-6}\,\frac{\Omega_2}{\nu}\,\textit{рад}=0{,}2\,\frac{\Omega_2''}{\nu}. \tag{10}$$

Рассмотрим влияние малых случайных отклонений от точных значений амплитуды и частоты колебаний подставки. Эти отклонения наиболее существенны вблизи нуля полосы синхронизации. Положим поэтому

$$\frac{\Omega_2}{\nu}=\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)_0+\xi(\tau), \tag{11}$$

где $\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)_0$ удовлетворяет условию $J_0=\left(\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)_0\right)=0.$

Будем считать, что время корреляции случайного процесса $\xi(\tau)$ велико по сравнению с $1/\Omega_1$, а следовательно, и по сравнению с периодом колебаний подставки. Тогда можно получить выражение для случайной полосы синхронизации, полагая $\xi(\tau)$ постоянной. Разложив в ряд $J_0\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)$, получим из (6)

$$\dot{\psi}-\Omega_0 J_1\left(\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)_0\right)\sin\psi\,\xi(\tau)=\Omega_1. \tag{12}$$

Отсюда следует, что случайная полоса синхронизации определена формулой

$$\Omega_{10}=\Omega_0 J_1\left(\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)_0\right)\cdot|\xi(\tau)|, \tag{13}$$

а для усредненной за период изменения частоты биений вне полосы синхронизации справедливо

$$\bar{\dot{\psi}}=\sqrt{\Omega_1^2-\Omega_0^2 J_1^2\left(\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)_0\right)\xi^2(\tau)}\,. \tag{14}$$

Если же, кроме того, время измерения значительно больше времени корреляции случайных отклонений, то имеет смысл говорить об усредненной за время измерения полосе синхронизации

$$\langle\Omega_{1c}\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Omega_0 J_1\left(\left(\frac{\Omega_2}{\nu}\right)_0\right)\langle\xi^2(\tau)^{1/2}\rangle, \tag{15}$$

а для усредненной частоты биений, вычисленной вдали от полосы синхронизации (при условии $\Omega_1 \gg \langle\Omega_{1c}\rangle$), получим

$$\langle\dot{\bar{\psi}}\rangle = \Omega_1\left(1 - \frac{\langle\Omega_{1c}^2\rangle}{2\Omega_1^2}\right). \tag{16}$$

Следовательно, флуктуации уменьшают измеряемое значение частоты.

2. Колебания подставки пилообразные. При этом $\Omega_2'(\tau)$ имеет вид прямоугольных импульсов, т. е. $\Omega_2(\tau) = \Omega_2(\tau + nT)$ и

$$\Omega_2(\tau) = \begin{cases} \Omega_2 & 0 < \tau < \frac{T}{2}, \\ -\Omega_2 & \frac{T}{2} < \tau < T. \end{cases} \tag{17}$$

Полоса синхронизации для этого случая в отсутствие флуктуаций была вычислена в работе [2]. Нули полосы синхронизации достигаются при условии

$$\sqrt{\Omega_2^2 - \Omega_0^2}\; T = 4n\Pi. \tag{18}$$

Рассмотрим влияние малых случайных изменений амплитуды и частоты колебаний угловой скорости подставки. Для этого положим

$$\Omega_2(\tau) = \begin{cases} \Omega_2 + \xi_1(\tau), & 0 < \tau < \frac{T}{2} + \eta_1(\tau), \\ -(\Omega_2 + \xi_2(\tau)), & \frac{T}{2} + \eta_1(\tau) < \tau < \eta_1(\tau) + \eta_2(\tau) + T. \end{cases} \tag{19}$$

Здесь $\xi_{1,2}$, $\eta_{1,2}$ — случайные процессы с нулевым средним.

Как и в случае синусоидальных колебаний подставки, ограничимся рассмотрением медленных флуктуаций, т. е. будем считать, что времена корреляции случайных процессов $\xi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ много больше периода колебаний подставки. Поскольку случайные отклонения играют существенную роль лишь в области нуля полосы синхронизации, выберем Ω_2 и T таким образом, чтобы удовлетворялось условие (18), при котором ширина полосы синхронизации в отсутствие флуктуаций обращается в нуль, а набег фазы за половину периода колебаний подставки равен $2\pi n$.

Перепишем уравнение (1) с учетом (19) в виде

$$\begin{gathered} \int\limits_{\psi}^{\psi'} \frac{dx}{\Omega_1 + \Omega_2 + \xi_1 - \Omega_0 \sin x} = \frac{T}{2} + \eta_1, \\ \int\limits_{\psi''}^{\psi'} \frac{dx}{\Omega_2 - \Omega_1 + \xi_2 + \Omega_0 \sin x} = \frac{T}{2} + \eta_2. \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь

$$\psi = \Psi(0), \ \psi' = \Psi\left(\frac{T}{2} + \eta_1\right), \ \psi'' = \Psi(T + \eta_1 + \eta_2);$$

ξ и η считаются постоянными величинами.

Если флуктуации достаточно малы и $\Omega_1 T \ll 1$, то должны выполняться следующие условия:

$$\psi' = \psi + 2\pi n + \Delta\psi', \ \psi'' = \psi + \Delta\psi, \text{ где } \Delta\psi, \ \Delta\psi' \ll 1.$$

Разлагая (20) в ряд по Ω_1, ξ_1, ξ_2, $\Delta\psi$, $\Delta\psi'$, получим

$$\begin{gathered} -\frac{T}{2}\frac{\Omega_2(\Omega_1+\xi_1)}{\Omega_2^2-\Omega_0^2}+\frac{\Delta\psi'}{\Omega_2-\Omega_0\sin\psi}=\eta_1, \\ \frac{T}{2}\frac{\Omega_2(\Omega_1-\xi_2)}{\Omega_2^2-\Omega_0^2}+\frac{\Delta\psi'-\Delta\psi}{\Omega_2+\Omega_0\sin\psi}=\eta_2. \end{gathered} \tag{21}$$

Исключая из этих уравнений $\Delta\psi'$ и заменяя $\Delta\psi/T$ производной $d\psi/d\tau$, получим дифференциальное уравнение, показывающее, как меняется сдвиг фаз между встречными волнами, измеряемый с интервалом, равным периоду колебаний подставки:

$$\mathring{\psi} = A\Omega_1 + \Omega_2\zeta_1(\tau) - \Omega_0\zeta_2(\tau)\sin\psi. \tag{22}$$

Здесь введены новые случайные процессы:

$$\zeta_1 = A\frac{\xi_1-\xi_2}{2\Omega_2}+\frac{\eta_1-\eta_2}{T}, \qquad \zeta_2 = A\frac{\xi_1+\xi_2}{2\Omega_2}+\frac{\eta_1+\eta_2}{T},$$

а

$$A = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2-\Omega_0^2}.$$

Как следует из вида уравнения (22), член $\Omega_2\zeta_1$ эквивалентен случайной медленно меняющейся угловой скорости вращения, а член $\Omega_0\zeta_2$ — случайной полосе синхронизации. Заметим, что даже в отсутствие флуктуаций, когда ширина полосы синхронизации равна нулю, частота биений, измеряемых таким способом, не равна Ω_1, а несколько больше $|A>1|$. Лишь при $\Omega_0/\Omega_2 \to 0$ частота биений стремится к Ω_1.

Если времена корреляции случайных процессов $\zeta_{1,2}$ много больше времени измерения, то в течении времени измерения случайные величины ζ_1 и ζ_2 можно считать постоянными. Тогда правая и левая границы полосы синхронизации определятся из следующего выражения:

$$\Omega_{1\pm} = \frac{1}{A}(\pm\Omega_0\zeta_2 - \Omega_2\zeta_1). \tag{23}$$

Следовательно, ширина полосы синхронизации равна

$$\Omega_{10} = \frac{\Omega_{1+}-\Omega_{1-}}{2} = \frac{1}{A}\Omega_0|\zeta_2|. \tag{24}$$

Если $\zeta_1 \neq 0$, то частотная характеристика расположена несимметрично относительно знака угловой скорости вращения, а средняя частота биений вне области синхронизации равна

$$\bar{\dot{\psi}} = \sqrt{(A\Omega_1+\Omega_2\zeta_1)^2-\Omega_0^2\zeta_2^2}. \tag{25}$$

В случае, когда время корреляции случайных процессов много меньше времени измерения, имеет смысл говорить о средних значениях полосы синхронизации и частоты биений. (В данном случае средние значения за время измерения совпадают со средними по ансамблю.) Среднее значение полосы синхронизации в приближении вторых моментов вычисляется непосредственно из (24). Отсюда следует, что

$$\langle \Omega_{10} \rangle = \frac{2}{A\sqrt{2\pi}} \Omega_0 \langle \zeta_2^2 \rangle^{1/2}. \tag{26}$$

Заметим, что внутри вычисленной таким образом средней полосы синхронизации среднее значение частоты биений не равно нулю. Оно лишь значительно меньше, чем $A\Omega_1$.

Чтобы вычислить среднее значение частоты биений, надо решить уравнение (22). Решение этого уравнения проведем в частном случае, когда время корреляции случайных процессов много больше среднего периода изменения фазы. Тогда уравнение (22) можно решать так, как если бы ζ_1 и ζ_2 были постоянными величинами. Условие применимости такого метода решения имеет вид

$$\left\langle \sqrt{(A\Omega_1 + \Omega_2\zeta_1)^2 - \Omega_0^2 \zeta_2^2} \right\rangle \gg \frac{1}{\tau_{\text{корр}}}. \tag{27}$$

В этом случае случайная частота биений (усредненная за период изменения фазы) определяется формулой (25). Чтобы найти среднее значение частоты биений за время измерения, выражение (25) следует усреднить. Такое усреднение мы проделаем в случае, когда частота Ω_1 достаточна велика, так что выполняется условие

$$A^2 \Omega_1^2 \gg \Omega_2^2 \langle \zeta_1^2 \rangle, \quad \Omega_0^2 \langle \zeta_2^2 \rangle.$$

При этом условии правую часть выражения (25) можно разложить в ряд, а затем усреднить, ограничиваясь вторыми моментами:

$$\langle \bar{\dot{\psi}} \rangle = A\Omega_1 \left(1 - \frac{\Omega_0^2 \langle \zeta_2^2 \rangle}{2A^2 \Omega_1^2} \right). \tag{28}$$

Таким образом, среднее значение частоты биений вне области синхронизации отличается от $A\Omega_1$, т. е. флуктуации искажают ход частотной характеристики. Интересно заметить, что в данном случае флуктуации постоянной составляющей угловой скорости не влияют на величину среднего значения частоты биений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Климонтович Ю. Л., Курятов В. Н., Ланда П. С. ЖЭТФ, **51**, 3, 1966.
2. Курятов В. Н., Ланда П. С., Ларионцев Е. Г. «Изв. вузов», радиофизика, **11**, № 12, 1839, 1968.

Поступила в редакцию
25.6 1969 г.

Кафедра
общей физики для мехмата