Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1970

УДК 62—503

О. Д. АХМАТОВА, Г. А. БЕНДРИКОВ

К ИССЛЕДОВАНИЮ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МЕТОДОМ ТРАЕКТОРИЙ КОРНЕЙ

В работе рассмотрена система, состоящая из идеального усилителя, охваченного распределенной обратной связью. Исследованы общие свойства траекторий корней характеристического уравнения замкнутой системы с учетом дисперсии в цепи обратной связи при различных соотношениях между параметрами линии.

В работе рассматривается замкнутая система, содержащая элемент с распределенными параметрами. Этот элемент в общем случае описывается уравнениями в частных производных гиперболического или параболического типа, либо дифференциально-разностными уравнениями. Применив преобразование Лапласа к указанным уравнениям, приходим к анализу замкнутых систем на плоскости комплексных частот p. Особенность элементов с распределенными параметрами заключается в том, что их передаточная функция является трансцендентной функцией p и, следовательно, характеристическое уравнение замкнутой системы трансцендентно.

Для исследования таких характеристических уравнений применим метод траекторий корней, с помощью которого можно исследовать, как изменяются корни характеристического уравнения при непрерывном изменении некоторого свободного параметра, линейно входящего в коэффициенты характеристического уравнения. Такое исследование позволяет выяснить область устойчивости, условия возбуждения, возможность автоколебательного режима в системе, а также рассмотреть динамические свойства системы в области устойчивости.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из идеального усилителя с коэффициентом усиления k, выход которого соединен со входом посредством согласованной длинной линии, характеризуемой погонными параметрами L, C, R, g. В данной работе исследование проводится с учетом дисперсионных свойств цепи обратной связи при различных соотношениях между параметрами длинной линии L, C, R, g. Кроме того, исследуются свойства системы в зависимости от величины коэффициента усиления усилителя.

Передаточная функция отрезка длинной линии длины l, согласованного на конце (или полубесконечной длинной линии), имеет вид

$$G(p) = \exp(-l\sqrt{LCp^2 + (Lg + RC)p + Rg}). \qquad (1)$$

Заметим, что передаточная функция (1) в зависимости от соотношения между параметрами длинной линии соответствует разным дифференциальным уравнениям движения. Если в линии отсутствуют потери ($R=g=0$), то линия описывается волновым или разностным уравнением и представляет собой элемент «чистого» запаздывания. Если в линии можно пренебречь индуктивностью и утечкой ($L=g=0$), то линия описывается уравнением теплопроводности. С учетом всех параметров линия описывается уравнением гиперболического типа. Исследование на плоскости комплексных частот позволяет применить общий метод к рассмотрению разных типов уравнений.

Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(p)=\frac{kG(p)}{1+kG(p)}. \tag{2}$$

Сигнал на выходе цепи обратной связи, когда на вход усилителя воздействует единичный скачок напряжения, представляется в виде

$$h(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{\Phi(p)}{p}e^{pt}dp. \tag{3}$$

Поскольку подынтегральная функция в (3), вообще говоря, является неоднозначной функцией p, то при вычислении интеграла (3) выделяется однозначная ветвь подынтегральной функции, удовлетворяющая условиям существования оригинала. В результате интегрирования (3) получим [1]

$$h(t)=\frac{k}{k+e^{\sqrt{Rg}l}}+\sum_i \text{выч}\left[\frac{\Phi(p)}{p}e^{pt},\ p_i\right]+$$

$$+\frac{\beta}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{2ke^{(\beta x-\delta_0)t}\sin\left(\tau\beta\sqrt{1-x^2}\right)}{1+k^2+2k\cos\left(\tau\beta\sqrt{1-x^2}\right)}\,\frac{dx}{(\beta x-\delta_0)}, \tag{4}$$

где p_i — корни характеристического уравнения

$$1+k\exp\left[-l\sqrt{LCp^2+(Lg+RC)p+Rg}\right]=0, \tag{5}$$

$$\delta_0=\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}+\frac{g}{C}\right),\quad \tau=l\sqrt{LC},\quad \beta=\frac{1}{2}\left|\frac{R}{L}-\frac{g}{C}\right|.$$

Наличие интеграла в (4) обусловлено неоднозначностью передаточной функции (2). Для случая линии без потерь ($R=g=0$) или неискажающей линии ($RC=Lg$) этот интеграл равен нулю. В общем случае интеграл в (4) в элементарных функциях не представляется, однако, ограничен при всех t и стремится к нулю с ростом t. Отсюда следует, что устойчивость рассматриваемой системы полностью определяется корнями характеристического уравнения (5).

Для исследования расположения корней уравнения (5) на комплексной плоскости p, принимая коэффициент усиления k за параметр траекторий, получим уравнение траекторий корней характеристического уравнения (5) и формулу параметра k [2].

Подставляя $p=\delta+j\omega$, уравнение (5) можно записать в виде

$$k=-e^{(\alpha+j\theta)l}, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha &= \operatorname{Re}\sqrt{LCp^2+(RC+Lg)p+Rg},\\ \theta &= \operatorname{Im}\sqrt{LCp^2+(RC+Lg)p+Rg}.\end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку k — действительный параметр, то

$$\theta l = N\pi, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{8}$$

Четным значениям N соответствуют отрицательные значения k, что при данной записи характеристического уравнения соответствует положительному знаку обратной связи. Нечетным значениям N соответствуют положительные значения k или наличие отрицательной обратной связи в системе.

Уравнение (8) представляет собой уравнение траекторий корней характеристического уравнения (5) при изменении $|k|$ от нуля до ∞. Траектории корней, соответствующие четным (нечетным) N, называются четными (нечетными).

Для получения уравнения траекторий корней в виде $\omega=f(\delta)$ введем обозначения

$$\begin{aligned}z &= LCp^2+(RC+Lg)p+Rg = ap^2+bp+d =\\ &= [a(\delta^2-\omega^2)+b\delta+d]+j\omega(2a\delta+b) = u+jv.\end{aligned} \tag{9}$$

Тогда

$$\sqrt{z}=\sqrt{u+jv}=\alpha+j\theta=\sqrt{0{,}5(\sqrt{u^2+v^2}+u)}+j\sqrt{0{,}5(\sqrt{u^2+v^2}-u)}. \tag{10}$$

Учитывая (10), уравнение траекторий (8) можно записать

$$v^2 = 4\left(\frac{N^2\pi^2}{l^2}\right)^2 + 4\,\frac{N^2\pi^2}{l^2}\,u.$$

Подставляя значения u и v из (9), получим уравнение траекторий в виде

$$\omega^2\left[(2a\delta+b)^2+4a\frac{N^2\pi^2}{l^2}\right]=\frac{4N^2\pi^2}{l^2}\left[\frac{N^2\pi^2}{l^2}+a\delta^2+b\delta+d\right], \tag{11}$$

где $a = LC$, $b = RC + Lg$, $d = Rg$.

Несложно показать, что $\alpha = \frac{v}{2\theta}$. Действительно, из (10) имеем

$$\alpha^2=\frac{0{,}5(\sqrt{u^2+v^2}+u)\,0{,}5(\sqrt{u^2+v^2}-u)}{0{,}5(\sqrt{u^2+v^2}-u)}=\frac{v^2}{4\theta^2}.$$

Учитывая это, формулу параметра $k=k(\delta,\omega)$, т. е. формулу, определяющую значение k в каждой точке траекторий (8) или (11), получим из выражения (6) в виде

$$k=(-1)^{N+1}e^{\alpha l}=(-1)^{N+1}e^{\frac{vl^2}{2N\pi}}=(-1)^{N+1}\exp\left[\frac{\omega(2a\delta+b)}{2N\pi}\,l^2\right]. \tag{12}$$

Уравнение траекторий корней (11) и формула параметра (12) получены для системы, цепь обратной связи которой характеризуется всеми параметрами L, C, R и g. Прежде чем перейти к исследованию общих свойств траекторий корней таких систем, остановимся на некоторых частных системах. Рассмотрение частных систем интересно потому, что движения в них описываются дифференциальными уравнениями других типов. Кроме того, эти системы являются в некотором смысле предельными для исследуемой системы со всеми параметрами L, C, R и g.

1. Пусть в длинной линии отсутствуют потери ($R=g=0$). В этом случае (1) представляет передаточную функцию элемента с «чистым» запаздыванием

$$G(p)=e^{-p\tau}, \quad \tau=l\sqrt{LC}.$$

Сигнал на выходе такого элемента не искажается, но сдвинут на время τ.

При исследовании замкнутой системы, когда в качестве элемента обратной связи используется линия без потерь, приходим к уравнению траекторий корней (11) в виде ($a=LC$, $b=d=0$)

$$\omega\tau=N\pi, \quad N=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{13}$$

Трактории корней в этом случае представляют собой бесконечное число прямых, параллельных действительной оси. Для коэффициента усиления k из (12) с учетом (13) имеем

$$k=(-1)^{N+1}e^{\tau\delta}.$$

Такие системы подробно исследованы в работах [3, 4].

2. Неискажающая линия. Пусть параметры линии таковы, что выполняется условие $\frac{R}{L}=\frac{g}{C}=r$. В этом случае передаточная функция линии (1) примет вид $G(p)=e^{-(p+r)\tau}$, т. е. сигнал на выходе с опозданием на время τ повторяет сигнал на входе, отличаясь лишь на постоянный множитель $e^{-r\tau}$.

Траектории корней характеристического уравнения замкнутой системы те же, что в случае «чистого» запаздывания. (Уравнение (13).) Для коэффициента усиления справедливо выражение

$$k=(-1)^{N+1}e^{\tau(\delta+r)}.$$

При $|k|=1$ все корни находятся слева от мнимой оси на линии $\delta=-r$, а возбуждение имеет место при $|k|=e^{r\tau}$ на всех частотах $\omega_{кр}$.

3. Пусть в качестве элемента обратной связи используется коаксиальный кабель ($L=g=0$). Передаточная функция в этом случае равна

$$G(p)=e^{-\sqrt{p\tau_0}}, \quad \tau_0=l\sqrt{RC}.$$

Такой элемент существенно изменяет форму сигнала и обладает большим ослаблением.

Уравнение траекторий корней замкнутой системы (11) примет вид ($a=0$, $b=RC$, $d=0$)

$$\omega^2=\frac{4N^2\pi^2}{\tau_0^2}\left[\frac{N^2\pi^2}{\tau_0^2}+\delta\right].$$

Трактории корней представляют собой параболы с вершинами на действительной оси [5, 6] (рис. 1). На рисунках двойными стрелками обозначены четные траектории ($k<0$), одной стрелкой — нечетные ($k>0$). Коэффициент усиления в этом случае определяется по формуле (12)

$$k=(-1)^{N+1}e^{\frac{\omega\tau_0}{N\pi}}.$$

Аналогичные уравнения траекторий и параметра получаются при условии $R=C=0$. В этом случае постоянная замедления $\tau_0=l\sqrt{Lg}$.

Исследуем общие свойства траекторий корней характеристического уравнения (5) с учетом всех параметров линии L, C, R и g.

Рассмотрим зависимость $k=k(\omega, \delta)$, используя формулу (12). Очевидно, если $\omega \neq 0$, то $|k|=1$ при $\delta=-b/2a$ для любого $N\neq 0$, т. е. при $|k|=1$ все комплексные корни характеристического уравнения (5) лежат на вертикальной прямой $\delta=-b/2a$ слева от мнимой оси. Частоты, соответствующие $|k|=1$, находим из уравнения (11), подставляя $\delta=-b/2a$:

$$\omega^2 = \frac{1}{a}\left[\frac{N^2\pi^2}{l^2} - \frac{b^2}{4a} + d\right].$$

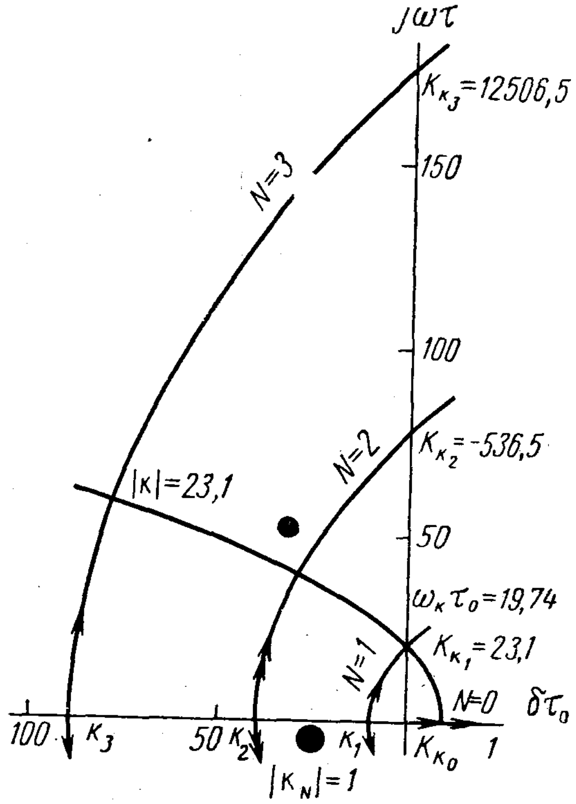

Рис. 1

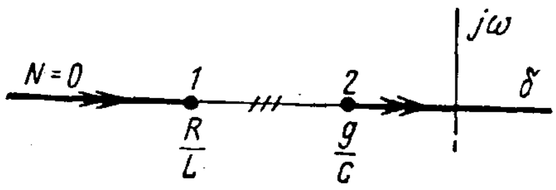

Рис. 2

Из формулы параметра (12) следует, что при $\delta<-b/2a$ коэффициент усиления $|k|<1$, а при $\delta>-b/2a$ $|k|>0$. Таким образом, общим свойством траекторий корней рассматриваемой системы является то, что корни движутся по траекториям слева направо при увеличении $|k|$ от нуля, достигая при $|k|=1$ вертикали $\delta=-b/2a$. При дальнейшем увеличении коэффициента усиления $|k|>1$ корни уходят вправо, пересекая мнимую ось.

В случае линии без потерь ($R=g=0$ или $b=0$) все корни находятся на мнимой оси при $|k|=1$.

Траектории корней симметричны относительно линии $\delta=-b/2a$.

В этом нетрудно убедиться, если в уравнение траекторий (11) подставить $\delta=-b/2a+x$ и $\delta=-b/2a-x$.

Траектории корней симметричны относительно действительной оси, поскольку в уравнение траекторий корней входит только ω^2.

Асимптотами траекторий являются горизонтальные прямые $\omega = \frac{N\pi}{\tau}$, $(\tau = l\sqrt{LC})$. Действительно,

$$G(p)_{p\to\infty} = \exp_{p\to\infty}\left[-l\sqrt{ap^2+bp+d}\right] \to \exp\left[-l\sqrt{ap^2}\right] = e^{-p\tau},$$

т. е. рассмотренная ранее система с «чистым» запаздыванием является асимптотической для систем, характеризуемых всеми параметрами линии.

Вся действительная ось, вообще говоря, не является траекторией корней. Траектории $N=0$ принадлежат участки $-\infty<\delta<-R/L$ и

$-g/C<\delta<\infty$, если $R/L>g/C$, или $-\infty<\delta<-g/C$ и $-R/L<\delta<\infty$, если $g/C>R/L$ (рис. 2). Только в случае чистого запаздывания ($R=g=0$) или неискажающей линии ($RC=Lg$) вся действительная ось является траекторией $N=0$. Для кабеля ($L=g=0$) траекторией $N=0$ является только положительная полуось действительной оси.

Действительно, полагая $\omega=0$, $N=0$, формула параметра (6) примет вид

$$k=-e^{\alpha l}, \tag{14}$$

где

$$\alpha=\sqrt{a\delta^2+b\delta+d}=\sqrt{a(\delta-\delta_1)(\delta-\delta_2)}=\sqrt{LC\left(\delta+\frac{R}{L}\right)\left(\delta+\frac{g}{C}\right)}.$$

Так как α — величина действительная, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\delta+\frac{R}{L}>0 \text{ и } \delta+\frac{g}{C}>0$$

или

$$\delta+\frac{R}{L}<0,\ \delta+\frac{g}{C}<0.$$

Считая, что $R/L>g/C$, получим, что траектории $N=0$ принадлежат участки действительной оси $\delta<-R/L$ и $\delta>-g/C$ (рис. 2). (Если $g/C>R/L$, то траекторией $N=0$ является $\delta<-g/C$ и $\delta>-R/L$.) В случае чистого запаздывания и неискажающей линии точки 1 и 2 на рис. 2 сливаются, для коаксиального кабеля $\delta=-R/L\to-\infty$, а $\delta=-g/C=0$.

Значение параметра k для разных точек этой ветви (траектории $N=0$) вычисляем по формуле (14). В точках $\delta=-R/L$ и $\delta=-g/C$ коэффициент усиления $k=-1$, для $\delta<-R/L$ $|k|<1$, а для $\delta>-g/C$ $|k|>1$. Критическое значение коэффициента усиления, соответствующее выходу корня в правую полуплоскость, равно $k=e^{-\sqrt{RG}l}$.

Таким образом, если в системе утечка пренебрежимо мала ($g=0$), а обратная связь положительна, такая система неустойчива при $|k|>1$.

Вид комплексных ветвей траекторий корней ($N\neq0$) существенно зависит от значения параметра

$$A=\left|\rho g_0-\frac{R_0}{\rho}\right|,\ \text{где } \rho=\sqrt{\frac{L}{C}},\quad R_0=Rl,\quad g_0=gl.$$

Если $A<2\pi$, то комплексные ветви траекторий не заходят на действительную ось. При

$$A=\left|\rho g_0-\frac{R_0}{\rho}\right|\geqslant 2N\pi \tag{15}$$

N ветвей траекторий заходят на действительную ось (рис. 3).

Пусть $N\neq0$, $\omega=0$. В этом случае уравнение траекторий (11) имеет вид

$$\frac{N^2\pi^2}{l^2}+a\delta^2+b\delta+d=0$$

или

$$\delta=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{1}{a}\left[\frac{N^2\pi^2}{l^2}+d\right]}. \tag{16}$$

По определению δ — величина действительная, т. е. ветвям траекторий корней ($N \neq 0$), для которых справедливо условие

$$\frac{b^2}{(2a)^2} \geqslant \frac{1}{a}\left[\frac{N^2\pi^2}{l^2} + d\right], \tag{15'}$$

на действительной оси принадлежат отдельные точки, определяемые уравнением (16). При этом каждому N соответствует два отрицательных значения δ (рис. 3, *б*, *в*). Коэффициент усиления k в этих точках

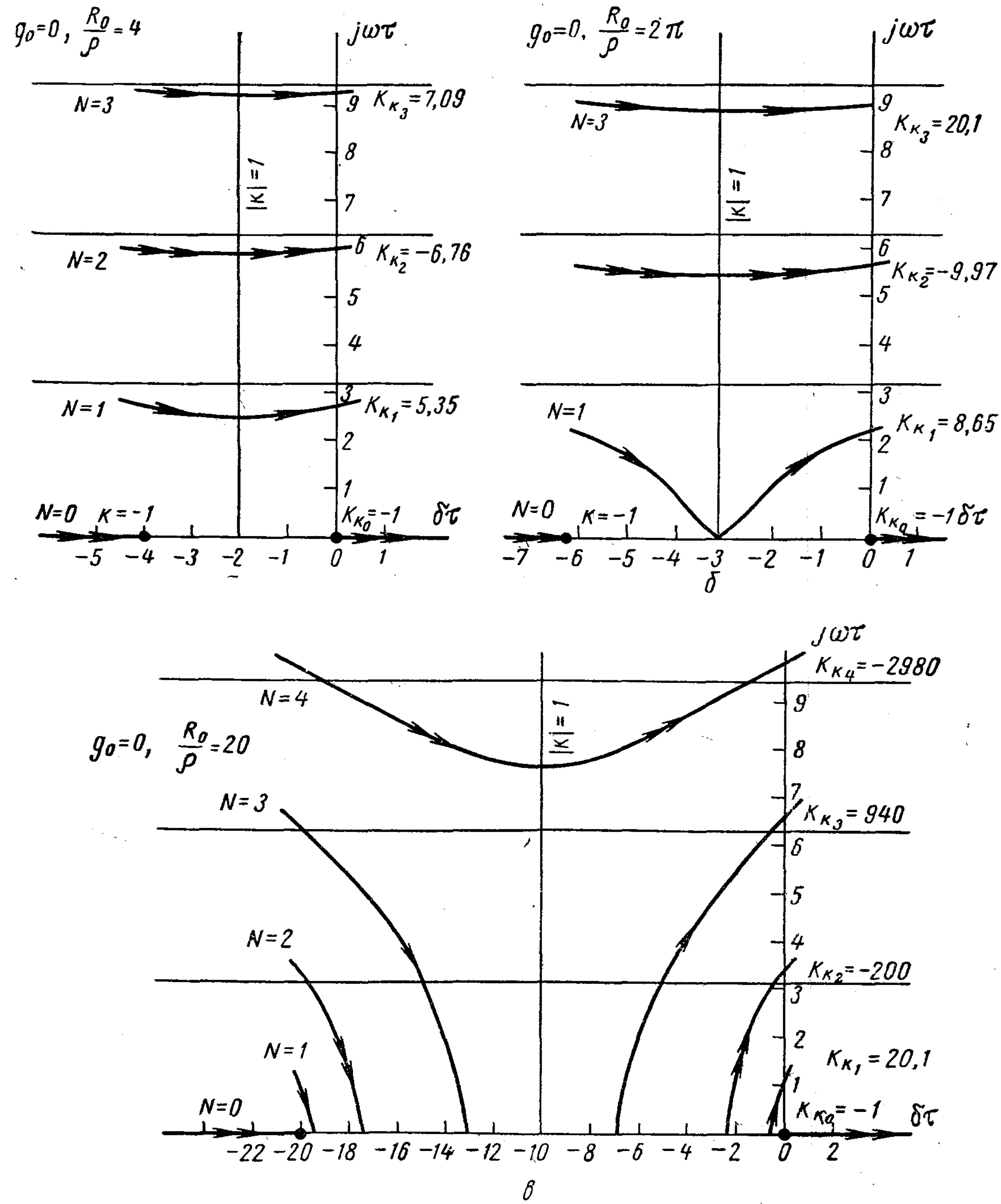

Рис. 3

всегда равен |1|. В случае равенства в условии (15′) имеется двойная точка на действительной оси (рис. 3, *б*). Если выразить a, b, d через параметры линии, то условие (15′) примет вид (15).

Возможный вид траекторий корней в зависимости от выполнения условия (15) показан на рис. 3. Если параметры линии таковы, что условие (15) не выполняется при $M=1$, то ни одна из комплексных ветвей не заходит на действительную ось (рис. 3, *а*).

С увеличением потерь и уменьшением волнового сопротивления условие выполняется для все большего числа ветвей N и, следовательно, все большее число корней при $|k|=1$ находятся на действительной оси. При этом линия усиления $|k|=1$, определяемая как $\delta=-\frac{b}{2a}=\frac{-1}{2\tau}\left(\rho g_0+\frac{R_0}{\rho}\right)$, все больше смещается в область отрицательных значений δ. В пределе при $L=0$ $(\rho=0)$ эта линия находится в бесконечности. Условие (15) выполнено для сколь угодно большого числа N, т. е. все ветви траекторий при $|k|=1$ начинаются на действительной оси. Это соответствует системе с кабелем в цепи обратной связи; траектории корней такой системы представляют собой параболы с вершинами на действительной отрицательной полуоси (рис. 1).

На рис. 3 построены траектории корней замкнутой системы при различных значениях R_0/ρ, $(g_0=0)$ на комплексной плоскости приведенных частот $p\tau=\delta\tau+j\omega\tau$, $\tau=l\sqrt{LC}$. Рис. 3,*в* соответствует случаю, когда три ветви траекторий заходят на действительную ось $(R_0/\rho=20,\ g_0=0)$. Горизонтальные прямые на всех рисунках соответствуют траекториям корней системы без дисперсии $(R=g=0$ или $RC=Lg)$. Поскольку четные и нечетные траектории соответствуют разным знакам обратной связи, при исследовании конкретной системы необходимо рассматривать только четные (нечетные) траектории.

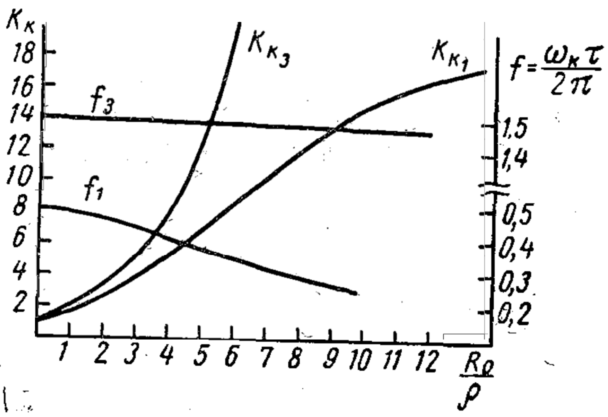

Рис. 4

Особый интерес представляют точки пересечения траекториями корней мнимой оси, так как они определяют область устойчивости, условия возбуждения и значения критических частот.

Значения критических частот находятся из уравнения (11) при $\delta=0$

$$\omega_{кр}=\frac{N\pi}{l\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{N^2\pi^2+R_0g_0}{\left[\frac{1}{2}\left(\rho g_0+\frac{R_0}{\rho}\right)\right]^2+N^2\pi^2}}. \tag{17}$$

Значение критической частоты возрастает с ростом номера N, причем критические частоты образуют неэквидистантный спектр. Исключение составляют системы без дисперсии.

Критическое значение коэффициента усиления, согласно формуле (12), равно

$$k_{кр}=(-1)^{N+1}\exp\left[\frac{\omega_{кр}}{2N\pi}(Lg+RC)\,l^2\right]. \tag{18}$$

Из (18) следует, что если $R\neq0$, $g\neq0$ и $RC\neq Lg$, то $|k_{0кр}|<|k_{1кр}|<|k_{2кр}|<\ldots$ Следовательно, если в системе положительная обратная связь $(k<0)$, то потеря устойчивости происходит апериодически при $k=k_{кр_0}=-e^{\sqrt{R_0g_0}}$. Для системы с отрицательной обратной связью, на рис. 4 показана зависимость приведенной частоты $f_1 = \frac{\omega_{кр1}\tau}{2\pi}$ и критического значения коэффициента усиления $k_{1кр}$ от отношения омического сопротивления к волновому сопротивлению линии R_0/ρ, $(g_0=0)$.

Для сравнения показана зависимость от R_0/ρ следующей критической частоты $f_3 = \frac{\omega_{3кр}\tau}{2\pi}$ и соответствующего критического коэффициента усиления $k_{3кр}$. При $R_0=0$ значения коэффициентов усиления $k_{кр}$ равны 1 для всех критических частот и, следовательно, система возбуждается при $k \geqslant 1$ сразу на всех частотах $\omega_{кр}$. Если $R_0/\rho \neq 0$, наиболее выгодные условия осуществляются для возбуждения низшей частоты. Однако если $R_0/\rho \ll 1$, то возможно возбуждение нескольких, вообще говоря, неэквидистантных частот. С ростом $R_0/\rho \gg 1$ возбуждение может иметь место только на низшей частоте $\omega_{кр1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азьян Ю. М., Мигулин В. В. «Радиотехника и электроника», № 1, 1956.
2. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
3. Цыпкин Я. З. «Автоматика и телемеханика», № 2—3, 1946.
4. Бендриков Г. А., Конев Ф. Б. «Автоматика и телемеханика», № 4, 1969.
5. Chu Y. Trans. AIEE, 71, 11, 1952.
6. О. Дж. М. Смит. Автоматическое регулирование. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
25.6 1969 г.

Кафедра
физики колебаний