

С. А. БИДИХОВ, Ю. В. ПОНОМАРЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ФЛАТТЕРЕ КРЫЛА С ЖЕСТКИМ ЭЛЕРОНОМ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В статье излагается решение задачи о флаттере крыла с жестким элероном с использованием АВМ. Задача решается методом, основанным на сведении решения соответствующей краевой задачи к решению некоторой совокупности задач Коши. Получено значение критической скорости полета и критической частоты колебаний при определенном значении упругости подвески элерона. Проведено сравнение с результатами, полученными методом Бубнова—Галеркина.

Явление флаттера заключается в потере колебательной устойчивости механической конструкции при определенных скоростях потока воздуха. Обычно подобные задачи, т. е. задачи, связанные с исследованием колебаний распределенных систем, решаются различными приближенными методами. В основе этих методов лежит замена рассматриваемой распределенной системы эквивалентной системой с конечным числом степеней свободы. К этим методам относятся метод Бубнова—Галеркина, метод конечных разностей и др. Результаты применения этих методов существенно зависят как от числа, так и от выбора степеней свободы эквивалентной системы. Задача, связанная с изучением колебаний распределенной системы, может быть решена более точным способом [1], в котором не требуется замена распределенной системы системой с конечным числом степеней свободы. Этот метод основан на сведении решения соответствующей краевой задачи к решению некоторой совокупности задач Коши, что позволяет применять для его реализации электронные моделирующие машины.

В настоящей работе описывается решение задачи о флаттере крыла с жестким элероном. Решение задачи проводилось с использованием электронной моделирующей машины методом, описанным в [1]. Крыло

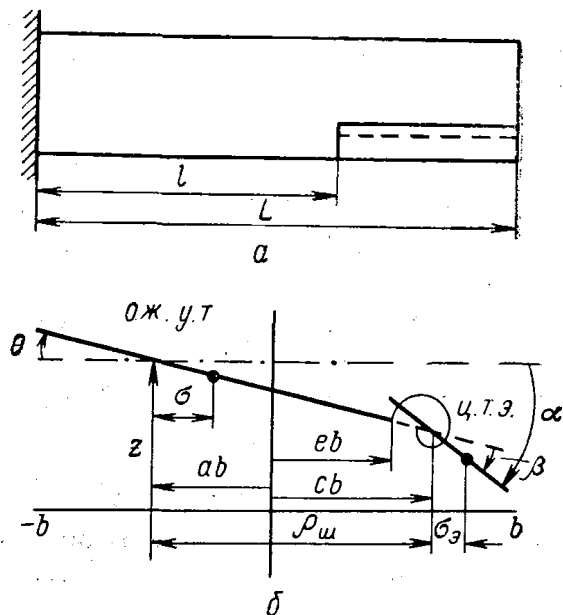


Рис. 1

рассматривалось как балка, консольно прикрепленная к неподвижному фюзеляжу. К задней кромке крыла между сечениями l и L был шарнирно прикреплен жесткий элерон (рис. 1). Вращение элерона вокруг оси ограничивалось пружиной с заданной погонной жесткостью на кручение, которая моделировала систему управления элероном. Уравнения колебаний крыла с жестким элероном в потоке воздуха могут быть записаны в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI_m \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] + m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - m\sigma \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - m_s \sigma_s \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= L_z, \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - m\sigma \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\rho_{ш} \sigma_s m_s + I_\beta) \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} &= M_\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int_l^L \left[r\beta + (\rho_{ш} \sigma_s m_s + I_\beta) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - m_s \sigma_s \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + I_\beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \right] dx = \int_l^L T_\beta dx,$$

где

$$\beta = \gamma(x) (\theta - \alpha), \quad \gamma(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < l \\ 1 & l \leq x \leq L. \end{cases}$$

$$z(0) = \frac{\partial z}{\partial x}(0) = \theta(0) = 0;$$

Запишем граничные условия для консольно закрепленного крыла

$$z(0) = \frac{\partial z}{\partial x}(0) = \theta(0) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(L) = \frac{\partial}{\partial x} \left[EI_m \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{x=L} = \frac{\partial \theta}{\partial x}(L) = 0. \quad (2)$$

Здесь t — время, EI_m (GI_p) — жесткость крыла на изгиб (кручение), r — погонная жесткость системы управления элероном, m — погонная масса крыла и элерона, I_m — погонный момент инерции крыла и элерона, m_s и I_β — погонные масса и момент инерции элерона относительно его оси вращения. Смысл остальных параметров пояснен на рис. 1, L_z и M_θ — подъемная сила и момент подъемной силы, действующие на единицу размаха крыла и элерона, T_β — момент подъемной силы, действующий на единицу длины элерона.

Аэродинамическое воздействие учитывалось по нестационарной теории несущей полосы [2]. Аэродинамические нагрузки зависят от перемещений системы $z(x, t)$, $\theta(x, t)$, $\alpha(t)$ их скоростей и ускорений, а также от скорости полета U и числа Струхала $k = \frac{\omega b}{U}$, причем последняя зависимость входит через функцию Теодорсена $C(k)$.

В данной работе было рассмотрено крыло и элерон с постоянными характеристиками вдоль размаха, которые имели следующие значения:

$$\begin{aligned} GI_p &= 2,78 \cdot 10^6 \text{ нм}^2, \quad EI_m = 3,18 \cdot 10^6 \text{ нм}^2, \quad m = 35,7 \text{ кг/м}, \\ I_m &= 12,77 \text{ кгм}, \quad I_\beta = 12,8 \cdot 10^{-3} \text{ кгм}, \quad m_s \sigma_s = 0,49 \text{ кг}, \quad L = 16,1 \text{ м}, \\ b &= 1,1411 \text{ м}, \quad \sigma = 0,2826 \text{ м}, \quad a = 0,32, \quad e = 0,5, \quad c = 0,6, \quad \rho = 1,224 \text{ кг/м}^3, \\ l &= 12,075 \text{ м}. \end{aligned}$$

Поскольку практический интерес представляет положение границы устойчивости (границы флаттера), то решение системы (1) можно представить в следующем виде:

$$z(x, t) = \bar{z}(x) e^{i\omega t}, \quad \theta(x, t) = \bar{\theta}(x) e^{i\omega t}, \quad \alpha(t) = \bar{\alpha} e^{i\omega t},$$

где $\bar{z}(x)$, $\bar{\theta}(x)$, $\bar{\alpha}$ — комплексные формы колебаний на границе флаттера, ω — критическая частота флаттера.

Для $\bar{z}(x)$, $\bar{\theta}(x)$, $\bar{\alpha}$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned} [EI_m \bar{z}'''] - m\omega^2 \bar{z} + m\sigma\omega^2 \bar{\theta} + \gamma m_s \sigma_s \omega^2 (\bar{\theta} - \bar{\alpha}) &= L_z, \\ -[GI_p \bar{\theta}'] - I_m \omega^2 \bar{\theta} + m\sigma\omega^2 \bar{z} - \gamma (\rho_{ш} \sigma_s m_s + I_\beta) \omega^2 (\bar{\theta} - \bar{\alpha}) &= M_\theta, \\ \int_0^L [r (\bar{\theta} - \bar{\alpha}) - (\rho_{ш} \sigma_s m_s + I_\beta) \omega^2 \bar{\theta} + m_s \sigma_s \omega^2 \bar{z} - \\ - I_\beta \omega^2 (\bar{\theta} - \bar{\alpha})] dx &= \int_0^L T_\beta dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь штрихами обозначено дифференцирование по x .

Система уравнений (3) с граничными условиями (2) представляет собой задачу на определение собственных функций $\bar{z}(x)$, $\bar{\theta}(x)$, $\bar{\alpha}$ и собственных значений $U_{фл}$ и $\omega_{фл}$. Решение этой задачи методом, изложенным в работе [1], заключается в нахождении корней характеристического уравнения (нулей характеристического детерминанта) с использованием фундаментальной системы частных решений, получаемой моделированием соответствующих уравнений на АВМ.

Практический интерес при рассмотрении флаттера крыла с элероном представляет зависимость скорости флаттера $U_{фл}$ от жесткости системы управления r , поскольку последняя может быть относительно легко изменена. На практике задача ставится следующим образом. Для заданного значения жесткости системы управления элероном необходимо определить критическое значение скорости. При аналитическом подходе или решении задачи с использованием аналоговых машин оказывается удобным задавать скорость флаттера и находить соответствующую этой скорости жесткость системы управления элероном. Ввиду этого жесткость системы управления элероном рассматривалась как свободный параметр, а в качестве искомым собственных значений было удобно выбрать U и k . Задача решалась по следующей схеме. При фиксированном значении k находилась такая пара U и r , которая обеспечивала решение задачи, т. е. при заданной жесткости системы управления r U и k были собственными значениями. Если допустить, что параметр r может принимать комплексные значения, то для любой пары значений U и k можно подобрать такое в общем случае комплексное r , чтобы эти U и k были собственными значениями. Однако флаттеру в реальной физической системе будут соответствовать только такие U и k , для которых r принимает действительные и положительные значения.

Решение задачи проводилось с использованием АВМ, на которой моделировалась система уравнений (3). Вводя машинные переменные

$$\frac{1}{b} \bar{z} = u_1 + iu_2, \quad \bar{\theta} = \varphi_1 + i\varphi_2, \quad \bar{\alpha} = \psi_1 + i\psi_2,$$

$$U = b\omega \quad \text{и} \quad x = L\tau,$$

уравнения (3), после деления на действительную и мнимую часть первых двух уравнений, можно записать в виде

$$\frac{1}{\omega^2} u_1^{IV} = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}\varphi_1 + a_{14}\varphi_2 + \delta [a_{15}(\varphi_1 - \psi_1) + a_{16}(\varphi_2 - \psi_2)],$$

$$\frac{1}{\omega^2} u_2^{IV} = -a_{12}u_1 + a_{11}u_2 - a_{14}\varphi_1 + a_{13}\varphi_2 + \delta [-a_{16}(\varphi_1 - \psi_1) + a_{15}(\varphi_2 - \psi_2)],$$

$$\frac{1}{\omega^2} \varphi_1'' = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}\varphi_1 + a_{24}\varphi_2 + \delta [a_{25}(\varphi_1 - \psi_1) + a_{26}(\varphi_2 - \psi_2)],$$

$$\frac{1}{\omega^2} \varphi_2'' = -a_{22}u_1 + a_{21}u_2 - a_{24}\varphi_1 + a_{23}\varphi_2 + \delta [-a_{26}(\varphi_1 - \psi_1) + a_{25}(\varphi_2 - \psi_2)] = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega^2} r \int_t^T (\varphi_1 + i\varphi_2 - \psi_1 - i\psi_2) d\tau + \bar{a}_{31} \int_t^T (u_1 + iu_2) d\tau + \\ + \bar{a}_{32} \int_t^T (\varphi_1 + i\varphi_2) d\tau + \bar{a}_{33} \int_t^T (\psi_1 + i\psi_2) d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь штрихами обозначено дифференцирование по машинному времени τ , коэффициенты a_{ij} зависят от числа Струхаля k , функция $\delta(\tau)$ равна единице на длине элерона, т. е. на интервале времени $[t, T]$, и равна нулю вне этого интервала, ω — машинный аналог скорости полета.

Граничные условия для машинных переменных имеют вид

$$\text{при } \tau = 0 \quad u_1 = u_2 = u_1' = u_2' = \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad (5)$$

$$\text{при } \tau = T \quad u_1'' = u_2'' = u_1''' = u_2''' = \varphi_1' = \varphi_2' = 0.$$

Решение уравнений (4) проводилось на электронной модели МНБ в соответствии со структурной схемой, представленной на рис. 2.

Система уравнений (4) моделировалась с использованием 16 операционных усилителей (12 интеграторов и 4 инвертора); функция $\delta(\tau)$, входящая в эти уравнения, была реализована с помощью блока стандартных нелинейностей (БСН), работающего в режиме релейной характеристики. Значения интегралов, входящих в уравнение (4), получались на выходах интеграторов 19—22.

Для фиксированных значений ω и k при произвольно заданных ψ_1 и ψ_2 решалась неоднородная краевая задача для уравнений (4) и граничных условий (5) с кусочно-постоянной неоднородностью ψ_1 и ψ_2 . Решение проводилось методом, аналогичным изложенному в работе [3]. Для получения на модели решения неоднородной краевой задачи необходимо сначала пересчитать недостающие начальные значения на один конец, т. е. определить значения $u_1'', u_2'', u_1''', u_2''', \varphi_1', \varphi_2'$ при $\tau = 0$. Этот пересчет производится с использованием общего решения системы неоднородных уравнений (4) и граничных условий (5). Общее решение неоднородной системы может быть представлено как сумма общего решения однородных уравнений и частного решения неоднородных уравнений. Общее решение системы однородных уравнений в свою очередь может быть составлено из суммы фундаментальных частных решений однородной системы (4), значения которых находи-

лись на модели путем решения соответствующих задач Коши. Частное решение неоднородной системы также находилось на модели путем решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями и фиксированным значением неоднородности $\bar{\alpha} = \psi_1$ ($\psi_2 = 0$). Пересчет недостающих начальных значений для решения неоднородной краевой задачи сводился к решению алгебраической системы уравнений шестого порядка,

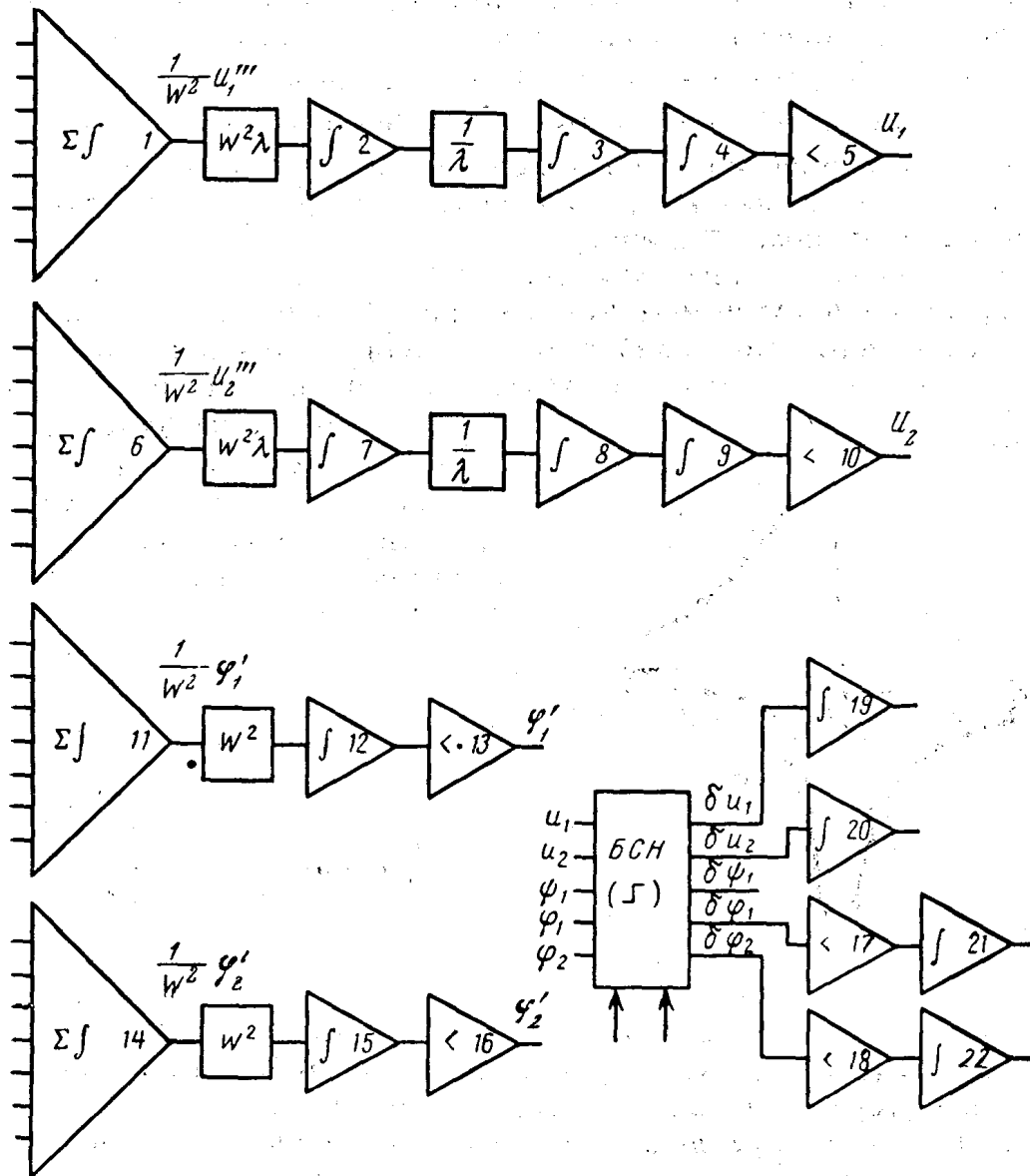


Рис. 2

коэффициентами которой были конечные ($\tau = T$) значения частных решений однородной и неоднородной системы уравнений (4). Таким образом, неоднородная краевая задача сводилась к задаче Коши и при ее решении на модели вычислялись значения интегралов, входящих в уравнение (4). Из уравнения (4) находилось значение \bar{r} , в общем случае комплексное, при котором выбранные ω и k были собственными значениями.

Для различных ω и фиксированном k вычислялись описанным выше способом значения \bar{r} , и из графика $\bar{r}(\omega)$ находилось значение \bar{r} , при котором мнимая часть \bar{r} обращалась в нуль, а действительная часть \bar{r} была положительной. Изменяя k и проводя изложенную выше процедуру, можно получить зависимость критической скорости ω от величины жест-

кости системы управления элероном r . На рис. 3 (сплошная линия) приведен один из графиков зависимости $\bar{r}(\omega)$, полученный для значения $k=0,4$. Значения $\omega=0,505$ и $k=0,4$ являются собственными значениями задачи при $r=4,2$.

Действительные и положительные значения r (что соответствует флаттеру в реальной физической системе) могут быть получены только для определенного интервала значений k [4]. Положение границ этого интервала существенно зависит от параметров крыла и элерона. Следовательно, если значение k находится вне границ этого интервала, то на графике $\bar{r}(\omega)$ либо мнимая часть не будет пересекать ось абсцисс, либо случаю $Im r=0$ будет соответствовать отрицательная действительная часть \bar{r} . Ориентировочное положение границ изменения k может быть получено с использованием приближенного расчета на флаттер, например, методом Бубнова—Галеркина.

Для сравнения с результатами, полученными на модели, был проведен расчет на флаттер методом Бубнова—Галеркина с использованием трех форм (первые тона свободных колебаний изгиба и кручения и постоянный по длине крыла угол кручения элерона). На рис. 3 (пунктирная кривая) приведена зависимость

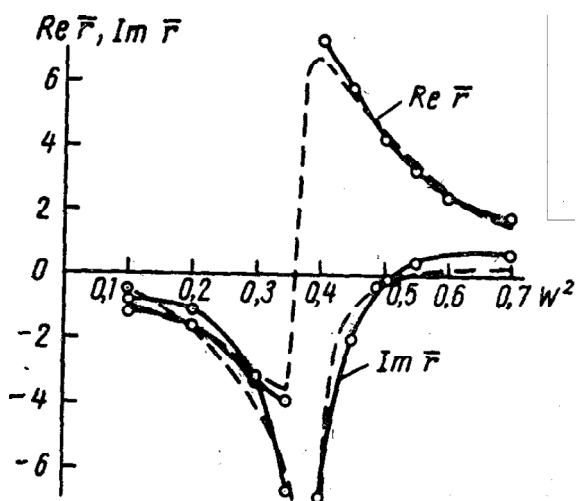


Рис. 3

зависимость \bar{r} от ω при $k=0,4$, а в следующей таблице приведены значения критических параметров, полученных с помощью модели и расчетным путем.

	Электронная модель	Расчет по Б. Г.
$U_{фл}, км/час$	360	371
$\omega_{фл}, рад/сек$	28,4	29,2
$k_{фл}$	0,4	0,4
$\omega_{эл}, рад/сек$	157	141

Флаттер крыла с элероном обычно возникает при определенных скоростях потока воздуха в результате взаимодействия первых двух частот свободных колебаний крыла и собственной частоты колебаний элерона. Близость критических параметров, полученных с помощью модели и расчетным путем, объясняется в основном тем, что частота собственных колебаний элерона $\omega_{эл}=157 рад/сек$ (что соответствует $r=4,2$) лежит значительно выше первых частот собственных изгиба $\omega_{изг}=12 рад/сек$ и кручения $\omega_{кр}=45 рад/сек$. Формы колебаний при флаттере, полученные на модели, также оказались близкими с расчетными. Интересно отметить, что скорость флаттера с упруго подвешенным элероном при частоте свободных колебаний элерона, значительно превышающей частоты первых двух свободных колебаний крыла, оказалась значительно выше (360 км/час), чем в случае жестко закрепленного элерона (296 км/час).

В заключение можно сделать вывод о том, что аналоговые машины являются эффективным средством для «точного» решения сложных задач на собственные функции и собственные значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланда П. С., Пономарев Ю. В. «Изв. ОНТИ», механика и машиностроение, № 2, 1963.
2. Scanlan R. H., Rosenbaum R. Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter. The Macmillan Company, N. Y., 1951.
3. Обувалин М. М., Этерман И. И. О решении краевых задач на непрерывных устройствах, предназначенных для решения задач Коши. «Инженерный сборник», 23, 1956.
4. Стрелков С. П., Харламов А. А. НДВШ, физ.-мат. науки, № 3, 1959.

Поступила в редакцию
1.7 1969 г.

Кафедра
общей физики для мехмата
