Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1970

УДК 521.1

Г. Н. ДУБОШИН

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЭФЕМЕРИДЫ В СЛУЧАЕ МАЛОГО ПЕРИГЕЛИЙНОГО РАССТОЯНИЯ

Орбитальные координаты тела, двигающегося по параболе с малым перигелийным расстоянием, представляются в виде абсолютно сходящихся рядов, расположенных по степеням некоторого малого параметра. Определяется радиус сходимости полученных рядов и указывается область их применимости.

Как известно из теории невозмущенного кеплеровского движения, для нахождения координат параболического движения нужно сперва решить кубическое уравнение [1]

$$\sigma^3 + 3\sigma = 3n(t - \tau), \tag{1}$$

где

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}\, q^{3/2}} \tag{2}$$

и q — перигелийное расстояние.

Найдя единственный вещественный корень уравнения (1), мы получим полярные и прямоугольные орбитальные координаты по формулам

$$r = q(1 + \sigma^2), \quad v = 2\operatorname{arctg}\sigma, \tag{3}$$

$$\xi = q(1 - \sigma^2), \quad \eta = 2q\sigma, \tag{4}$$

после чего по общим формулам невозмущенного движения можем получить также гелиоцентрические координаты и составляющие скорости, а затем и геоцентрические сферические координаты.

Однако если перигелийное расстояние q очень мало, то применение обычного способа для решения уравнения (1) может оказаться неудобным и привести к потери точности. Во избежание этого неудобства нужно устранить в правой части уравнения (1) особенность, возникающую при $q = 0$, что можно сделать, например, следующим образом.

Исключим из уравнения (1) и из первого равенства (3) величину σ и положим для упрощения формул

$$R = \sqrt{r - q} \tag{5}$$

и

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{\mu}\,(t-\tau)}{\sqrt{2}}}. \tag{6}$$

В результате мы получим уравнение

$$R^3 + 3qR = R_0^3, \tag{7}$$

не имеющее особенности при $q = 0$.

Уравнение (7), так же как и уравнение (1), имеет единственный вещественный корень (при вещественных q и R_0), положительный при $t > \tau$ и отрицательный при $t < \tau$, найдя который, мы можем получить затем орбитальные координаты по следующим формулам:

$$\begin{gathered} r = q + R^2, \quad v = \operatorname{arctg}\frac{R}{\sqrt{q}}, \\ \xi = q - R^2, \quad \eta = 2\sqrt{q}\,R. \end{gathered} \tag{8}$$

Уравнение (7) можно, конечно, решить обычным способом, например при помощи формулы Кардана, но возможно также найти R в виде ряда, расположенного по степеням q, или некоторого безразмерного малого параметра.

Действительно, при $q = 0$, уравнение (7) имеет вещественный корень R_0, соответствующий прямолинейному движению вырожденного параболического типа. Следовательно, можно искать вещественный корень уравнения (7) при $q \neq 0$, обращающийся в R_0, когда q обращается в нуль, в виде ряда, расположенного по степеням перигелийного расстояния, или связанного с ним параметра.

Для большего удобства преобразуем уравнение (7) к безразмерным переменным, полагая

$$\frac{R}{R_0} = X, \qquad \frac{q}{R_0^2} = \varkappa, \tag{9}$$

и запишем преобразованное уравнение следующим образом:

$$F(\varkappa, X) = X^3 + 3\varkappa X - 1 = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) удовлетворяется при $X = 1$, $\varkappa = 0$, а так как частная производная

$$F'_X(\varkappa, X) = 3(X^2 + \varkappa) \tag{11}$$

при этих же значениях переменных не равна нулю, то по известной теореме о неявных функциях (см., например, [2]) при $\varkappa$ не равном нулю, но достаточно малом, уравнение (10) имеет единственный корень, обращающийся в единицу при $\varkappa = 0$ и представляемый рядом, расположенным по степеням $\varkappa$.

Таким образом, запишем

$$X = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varkappa^k. \tag{12}$$

Коэффициенты ряда (12) легко определяются последовательно путем непосредственной подстановки или при помощи дифференцирований.

Найдя несколько первых коэффициентов, получим

$$X = 1 - \varkappa + \frac{1}{3}\varkappa^3 + \frac{1}{3}\varkappa^4 - \frac{4}{9}\varkappa^6 + \ldots \tag{13}$$

Вычислив с необходимой точностью величину X по этой формуле, мы найдем затем соответствующее значение R, а потом и орбитальные координаты по формулам (8).

Остается определить область применимости ряда (12), для чего нужно найти его радиус сходимости. Это можно сделать при помощи уже упомянутой теоремы о неявных функциях следующим образом.

Рассмотрим всевозможные, вообще говоря, комплексные значения величин $\varkappa$ и X, удовлетворяющие двум уравнениям

$$F(\varkappa, X) = 0, \quad F'_X(\varkappa, X) = 0. \tag{14}$$

Исключая из этих уравнений величину X, получим уравнение с одной неизвестной $\varkappa$, которое имеет вид

$$4\varkappa^3 + 1 = 0. \tag{15}$$

Один корень этого уравнения веществен, а два другие — комплексные сопряженные, причем все три корня имеют один и тот же модуль. Обозначая этот модуль буквой g, найдем

$$g = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = 0{,}6299605\ \ldots \tag{16}$$

По теореме о неявных функциях величина X, определяемая рядом (12), будет аналитической функцией от $\varkappa$ при $|\varkappa| < g$, а следовательно, ряд (12) будет сходиться абсолютно при условии

$$|\varkappa| < \frac{\sqrt[3]{2}}{2}. \tag{17}$$

Теперь, считая элементы орбиты и величину μ данными, можем также определить из условия (17) совокупность тех значений времени, для которых ряд (12) может быть применен.

Действительно, подставляя в неравенство (17) вместо $\varkappa$ его значение и заменяя затем R_0 его выражением из формулы (6), мы выведем следующее неравенство:

$$|t - \tau| > T = \frac{(2q)^{3/2}}{3\sqrt{\mu}}, \tag{18}$$

показывающее, что ряд (12) неприменим для вычисления X только внутри симметричного промежутка, центром которого является момент прохождения через перигелий и величина которого тем меньше, чем меньше перигелийное расстояние q.

Величину T удобно представить в следующем виде:

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{q}{a}\right)^{3/2}, \tag{19}$$

где a — любая линейная величина.

Если вообразить теперь эллиптическую орбиту, большая полуось которой есть a, то период обращения P по этой орбите определится формулой [3]

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2},$$

так что формула (19) даст

$$T = \frac{\sqrt{2}}{3\pi} P \left(\frac{q}{a} \right)^{3/2}. \tag{20}$$

Если за основные единицы взять, как обычно, массу Солнца, среднее расстояние Земли от Солнца и средние солнечные сутки, то P есть продолжительность сидерического года, а поэтому, полагая в формуле (20) $P=1$ и $a=1$, получим

$$T = 0,1499527 \cdot q^{3/2}, \tag{21}$$

где промежуток времени выражен в годах, а q — в астрономических единицах.

По данным, приведенным в книге С. К. Всехсвятского [4], почти параболические кометы имеют перигелийные расстояния, заключенные в промежутке от 0,4 *ае* до 1,2 *ае*.

Формула (21) дает для некоторых промежуточных значений перигелийного расстояния q следующие значения для T:

$$q = 0,2 \quad 0,4 \quad 0,6 \quad 0,8 \quad 1,0 \quad 1,2,$$

$$T = 0,015 \quad 0,045 \quad 0,075 \quad 0,108 \quad 0,150 \quad 0,200.$$

Как видим, этот ряд можно применять для вычисления параболической эфемериды не только при малом q. В самом деле, перигелийное расстояние может быть каким угодно, лишь бы выполнялось условие (18). Конечно, при увеличении q будет соответственно увеличиваться и T. Например, для $q=4$ имеем $T=1,2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., «Наука», 1968.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М., «Наука», 1967.
3. Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., «Наука», 1968.
4. Всехсвятский С. К. Физические характеристики комет. М., Физматгиз, 1958.

Поступила в редакцию
2.6 1969 г.

Кафедра
небесной механики
и гравиметрии