Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 4 — 1970

УДК 551.466

Г. Е. КОНОНКОВА, В. В. КУЗНЕЦОВ

ТРАНСФОРМАЦИЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА ПЛОСКОМ БЕРЕГОВОМ ОТКОСЕ

Теоретически исследуется изменение высоты гармонической волны бесконечно малой амплитуды на плоском береговом откосе с учетом потерь волновой энергии на трение о дно. Предполагается, что потери энергии сосредоточены в пограничном слое, являющемся ламинарным.

Ветровые волны, вступая в прибрежную зону переменной глубины, испытывают рефракцию, а также изменение высот, длин и скоростей распространения [1, 2, 3].

В работе [3] исследовано изменение энергии монохроматической волны и спектральной плотности энергии ветровых волн в прибрежной зоне для идеального случая, когда отсутствуют потери энергии.

В данной работе в рассмотрение включены потери волновой энергии вследствие трения о дно. Делается предположение, что потери энергии на внутреннее трение в воде компенсируются притоком энергии от ветра. Волнение рассматривается стационарное. Период волн предполагается неизменным.

При указанных предположениях в уравнении баланса энергии при волнении

$$l\frac{\partial E}{\partial t} = l\left[W_v - W_\mu\right] - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{1}$$

исчезают члены $l\frac{\partial E}{\partial t}$ и $l\left(W_v - W_\mu\right)$ и оно принимает вид

$$\frac{d\Phi}{\partial x} = Wl. \tag{2}$$

Здесь E — энергия волны, отнесенная к единице поверхности, t — время, W_v — энергия, передаваемая в единицу времени единице поверхности воды, W_μ — энергия волнового движения, переходящая вследствие внутреннего трения в тепловую в единицу времени в бесконечно глубоком столбе воды с единичным основанием, W — энергия волнового движения, переходящая в единицу времени в тепловую вследствие трения частиц воды об единицу поверхности дна, $\Phi = Ec_{\text{г}}l$ — поток волновой энергии, $c_{\text{г}}$ — групповая скорость волн, l — расстояние между двумя волновыми лучами. Ось x лежит в плоскости невозмущенного уровня воды и совпадает с направлением распространения волн.

Величину W найдем как среднюю работу, которую совершает сила трения τ, приложенная к единице поверхности у дна, в единицу времени:

$$W = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \tau u dt, \tag{3}$$

где T — период волны, u — горизонтальная составляющая скорости у дна. Предполагая, что потери энергии при этом сосредоточены в пограничном слое, примем для величины u известное выражение [4, 5] скорости в ламинарном пограничном слое периодического потока над пластиной:

$$u = u_0 \left[\cos(kx - \sigma t) - e^{-\frac{H+z}{\delta}} \cos(kx - \sigma t + \eta)\right]. \tag{4}$$

Здесь k — волновое число, σ — частота волны, ось z направлена вертикально вверх, H — глубина потока, $\delta = \left(\frac{2\nu}{\sigma}\right)^{1/2}$ — толщина пограничного слоя, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематическая вязкость воды, μ — ее динамическая вязкость, ρ — плотность;

$$\eta = (H + z)\sqrt{\frac{\sigma}{2\nu}}. \tag{5}$$

В качестве u_0 примем амплитуду горизонтальной составляющей орбитальной скорости частиц на расстоянии δ от дна

$$u_0 = \frac{agk}{\sigma} \left[\frac{\operatorname{ch} k(H+z)}{\operatorname{ch} kH}\right]_{z=-H+\delta} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\operatorname{ch} k\delta}{\operatorname{ch} kH}. \tag{6}$$

Напряжение трения запишем

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=-H} = \frac{\mu u_0}{\delta} [\cos(kx - \sigma t) + \sin(kx - \sigma t)]. \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) и (7) в (3), найдем среднюю величину работы силы трения

$$W = \frac{\mu}{2\delta} \left(\frac{agk}{\delta}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{ch} k\delta}{\operatorname{ch} kH}\right)^2. \tag{8}$$

Заменяя в уравнении (8) амплитуду волны ее энергией и учитывая, что $\operatorname{ch} k\delta \approx 1$, получим окончательное выражение для диссипации энергии волны

$$W = \frac{\nu g k^2}{\delta \sigma^2} \cdot \frac{E}{\operatorname{ch}^2 kH}. \tag{9}$$

Величина диссипации пропорциональна энергии волны.

Подставляя выражение (9) в (2), получим

$$\frac{d}{dx}(E c_г l) = -\frac{\nu g k^2}{\delta \sigma^2} \cdot \frac{El}{\operatorname{ch}^2 kH}. \tag{10}$$

Применим уравнение (10) для расчета изменения энергии волн на береговом откосе.

Пусть линия берега является бесконечной прямой, а дно водоема — плоскостью, угол наклона которой к горизонту равен α. При этом глубина воды

$$H = (x_0 - x)\operatorname{tg}\alpha, \tag{11}$$

где x_0 — расстояние от начала координат, лежащего в области больших глубин ($H \geqslant \lambda/2$), до берега.

Рассмотрим случай, когда скорость волн в этой области нормальна к линии берега и расстояние l между волновыми лучами неизменно. Уравнение (10) можно записать в другом виде:

$$\frac{dE}{E} = -\frac{dc_{\text{г}}}{c_{\text{г}}} - \frac{\nu g k^2}{\delta\sigma^2 c_{\text{г}}} \cdot \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 kH}. \tag{12}$$

Перейдем с помощью выражения (11) от переменной x к новой переменной (kH):

$$-dx = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{k_0} d(k_0 H) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{k_0}\left[\frac{kH}{\operatorname{ch}^2 kH} + \operatorname{th}(kH)\right] d(kH).$$

Здесь $k_0 = k\operatorname{th}(kH) = \text{const}$ — волновое число для глубокой воды.

Подставляя известное выражение групповой скорости на мелкой воде в третий член уравнения (12) и заменяя в нем dx его выражением через kH, получим

$$\frac{dE}{E} = -\frac{dc_{\text{г}}}{c_{\text{г}}} + \frac{2\nu\sigma\operatorname{ctg}\alpha}{\delta g} \cdot \frac{\operatorname{cth}^2 kH}{\operatorname{ch}^2 kH} d(kH).$$

Решением этого уравнения будет следующее выражение:

$$E = \frac{B}{c_{\text{г}}} \exp\left[-D\operatorname{cth} kH\right].$$

Здесь $D = \dfrac{2\nu\sigma\operatorname{ctg}\alpha}{g\delta}$, постоянная B может быть определена из граничного условия, что при $kH \to \infty$ $E = E_0$ и $c_{\text{г}} = c_{\text{г}_0}$. Окончательное выражение энергии волны на произвольной глубине имеет вид

$$\frac{E}{E_0} = \frac{c_{\text{г}_0}}{c_{\text{г}}} e^{D(1 - \operatorname{cth} kH)}. \tag{13}$$

Отсюда следует закон изменения высоты волны в прибрежной зоне:

$$h^2 = h_0^2 \frac{\operatorname{cth} kH}{1 + \dfrac{2kH}{\operatorname{sh} 2kH}} e^{D(1 - \operatorname{cth} kH)}. \tag{14}$$

При отсутствии трения, т. е. при $D=0$, из уравнения (13) получаем закон постоянства потока энергии

$$Ec_{\text{г}} = E_0 c_{\text{г}_0} = \text{const}.$$

В этом случае, рассмотренном в работе [3], высота волны при подходе к берегу вначале уменьшается (рис. 1), а затем, достигнув минимума при $k_0 H \cong 1$, неограниченно возрастает при уменьшении глубины. Фактически, конечно, неограниченного возрастания высоты волны наблюдаться не может, поскольку произойдет ее обрушение.

Трение вносит изменения в ход кривой зависимости высоты волны от относительной глубины k_0H. При сравнительно небольшом значении параметра трения $D \simeq 0{,}1 \div 0{,}2$ высота волны, возрастая при подходе к берегу в область малых глубин, достигает максимума, а затем уменьшается до нуля.

Если же $D \geqslant 0{,}4$, то возрастание высоты волны вообще не имеет места (рис. 1). При этом исчезают оба экстремума.

Параметр трения

$$D = \frac{\sqrt{2}}{g} \nu^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{3}{2}} \operatorname{ctg} \alpha$$

зависит не только от вязкости воды, но и от частоты волн σ и угла наклона плоскости дна к горизонту. Возрастание частоты волн приводит к увеличению параметра трения, а возрастание угла наклона α — к уменьшению его. С параметром трения D связано положение экстремумов кривой зависимости относительной высоты от относительной глубины kH. Найдем связь значений $(kH)_{ext}$, соответствующих экстремумам высоты волны, от величины параметра D. Для этого продифференцируем уравнение (14) по kH и приравняем производную нулю. Получаем следующее выражение параметра трения через величину $(kH)_{ext}$:

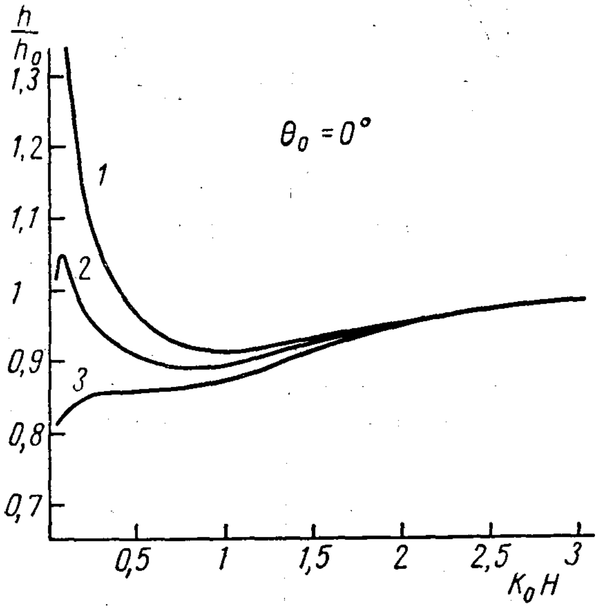

Рис. 1. Изменение относительной высоты волн в зоне уменьшающихся глубин над плоским береговым откосом при различных значениях параметра трения. 1 — $D=0$, 2 — $D=0{,}2$ и 3 — $D=0{,}4$

$$D = 2\operatorname{th}(kH)_{ext} \frac{\operatorname{sh} 2(kH)_{ext} - 2(kH)_{ext} \operatorname{sh}^2(kH)_{ext}}{\operatorname{sh} 2(kH)_{ext} + 2(kH)_{ext}}. \tag{15}$$

На рис. 2 приводятся значения параметра трения, соответствующие различным положениям экстремумов на оси kH. При возрастании параметра трения максимум и минимум высот волн сближаются и при достижении им величины 0,4 сливаются в точке $(kH)_{ext} \simeq 0{,}55$. При значениях параметра трения, больших 0,4, экстремумы не образуются, а высота волны непрерывно уменьшается с уменьшением глубины.

Поскольку параметр D зависит от частоты волны, то от нее зависит и положение экстремумов. Эта зависимость выражается следующим уравнением:

$$\sigma^{3/2} = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{(2\nu)^{1/2}} \cdot \frac{2\operatorname{th}(kH)_{ext} [\operatorname{sh} 2(kH)_{ext} - 2(kH)_{ext} \operatorname{sh}^2(kH)_{ext}]}{\operatorname{sh} 2(kH)_{ext} + 2(kH)_{ext}}. \tag{16}$$

На рис. 3 представлен график зависимости положения максимума высот волн от частоты $f = \frac{\sigma}{2\pi}$. График показывает, что для коротких волн максимум находится на больших относительных глубинах kH, чем для более длинных волн.

Полученные теоретические результаты качественно подтверждаются экспериментами, выполненными в гидроканале с наклонным плоским дном. При экспериментах было обнаружено наличие максимумов на

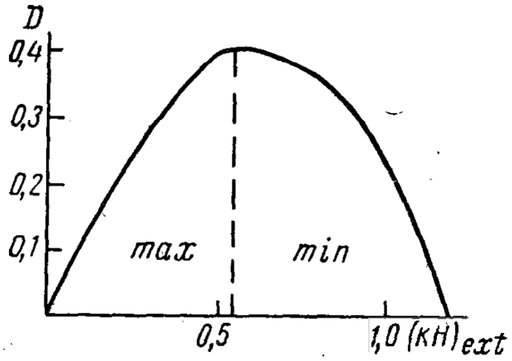

Рис. 2. Зависимость между параметрами трения D и положением экстремумов высот волн

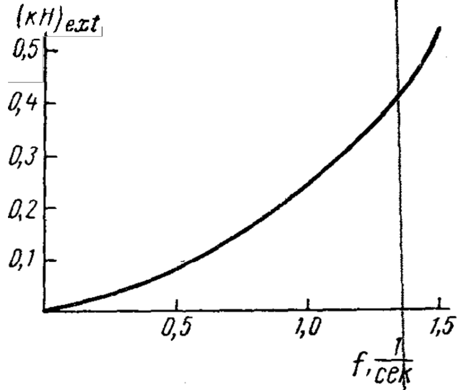

Рис. 3. Зависимость относительной глубины kH, соответствующей максимуму высоты волн, от частоты $f=2\pi/\sigma$ при $\operatorname{tg}\alpha=10^{-2}$

кривых зависимости высот волн от относительной глубины и установлено, что с уменьшением длины волны эти максимумы перемещаются в область бóльших относительных глубин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шулейкин В. В. Физика моря. М., «Наука», 1968.
2. Бровиков И. С. «Изменение элементов волн при их выходе на мелководье». Труды ГОИН, вып. 50, 1960.
3. Крылов Ю. М., Стрекалов С. С., Цыплухин В. Ф. «Трансформация энергетического спектра ветровых волн в прибрежной зоне». Труды Союзморниипроекта, № 8 (14), 1965.
4. Хант Д. Н. Динамика несжимаемой жидкости. М., «Мир», 1967.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., ИЛ, 1956.

Поступила в редакцию
8.7 1969 г.

Кафедра
физика моря и вод суши