Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1970

Р. Л. СТРАТОНОВИЧ

ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННАЯ ТЕРМОДИНАМИКА С ВРЕМЕННО-ЧЕТНЫМИ И ВРЕМЕННО-НЕЧЕТНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ (I)

Полученные ранее автором результаты нелинейной феноменологической флуктуационно-диссипационной теории обобщены на тот случай, когда часть переменных меняет знак при обращении времени. Указана методика вывода основных соотношений, содержащих различное число индексов.

В развитой ранее автором [1—4] феноменологической флуктуационно-диссипационной термодинамике, которая включает в себя известные соотношения линейной теории (соотношения Онзагера и флуктуационно-диссипационную теорему) как частный случай, использовался принцип симметрии относительно обращения времени. При этом предполагалось, что термодинамические переменные при таком обращении не меняют знак, т. е. являются временно-четными. Это предположение, однако, является чрезмерно ограничительным с точки зрения приложений теории. Известно, что некоторые физические переменные, например, импульсы в механике, напряженности и индукции магнитных полей в электродинамике являются временно-нечетными, т. е. меняют знак при обращении времени. Для применения теории к случаям, включающим такие переменные, требуется произвести ее обобщение, что и составляет содержание настоящей статьи. Для конкретности временно-нечетные переменные трактуются как импульсы.

Здесь используется несколько другой (по счету третий — первый изложен в [1], второй в [2]) метод вывода основных результирующих соотношений. В этом методе мы избавляемся от принятого ранее предположения, чтобы неравновесные распределения обязательно имели экспоненциальный вид $\mathrm{const}\cdot e^{XB}w_{\text{ст}}(B)$ (X — не зависящие от B переменные, характеризующие степень неравновесности).

Как видно из приводимых ниже результатов, в обобщенной теории в рамках трехиндексных соотношений по-прежнему удается полностью выразить флуктуационные характеристики и, в частности (теперь уже непостоянные) диффузионные коэффициенты через средние скорости, т. е. через феноменологические уравнения. Основные соотношения нумеруются тремя цифрами: первая (римская) указывает общее число индексов в данном соотношении, вторая (арабская) — минимальное число индексов, стоящих до запятой, а значит не связанных с дифференцированием, и третья (буква) — число временно-нечетных индексов.

§ 1. Принцип временной симметрии в случае переменных различной временной четности

Содержание этого и последующих параграфов аналогично содержанию § 1—3 работы [2], но применено к переменным, которые не обязательно четны относительно обращения времени. Ранее предполагалось, что при преобразовании $t \to -t$ знак термодинамических параметров не меняется: $A_\alpha \to A_\alpha$. Будем считать, что часть переменных B_i, скажем, координаты q_i, не меняют знак, а другая часть C_j (импульсы p_j) меняет: $p_j \to -p_j$.

Как и в § 1 [2], примем марковский принцип, т. е. будем предполагать, что процесс в фазовом пространстве с координатами $q_1, \ldots, q_n$, $p_1, \ldots, p_n$ является марковским. Плотность распределения $w(q, p, t)$ в фазовом пространстве удовлетворяет, следовательно, уравнению

$$w(q, p, t) = \int W(q, p, t;\ q_0, p_0, t_0) \cdot w(q_0, p_0, t_0)\, dq_{01} \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot dq_{0n} \cdot dp_{01} \cdot \ldots \cdot dp_{0n} \qquad (1)$$

$(t > t_0)$ или, если устремить $t \to t_0$, дифференциальному уравнению

$$\dot{w}(q, p, t) = \int f(q, p;\ q', p', t) \cdot w(q', p', t)\, dq'\, dp' -$$
$$- \int f(q', p';\ q, p, t)\, dq'\, dp' \cdot w(q, p, t). \qquad (2)$$

Последнее можно записать в операторной форме

$$\dot{w}(q, p, t) = Fw \equiv F\left(-\frac{\partial}{\partial q},\ -\frac{\partial}{\partial p},\ q, p, t\right) w. \qquad (3)$$

Входящий сюда оператор $F\left(-\frac{\partial}{\partial q},\ -\frac{\partial}{\partial p},\ q, p, t\right)$, полностью задаваемый дифференциальной вероятностью перехода $f(q, p;\ q', p', t)$, определяет вероятности перехода $W(q, p, t;\ q_0, p_0, t_0)$, т. е. определяет, если добавить начальное распределение в фазовом пространстве, все статистические характеристики флуктуационно-диссипационного процесса в этом пространстве.

По аналогии с формулой (4) из [2] входящий в (3) оператор F можно записать в виде формального разложения Тейлора по дифференциальным операторам

$$F\left(-\frac{\partial}{\partial q},\ -\frac{\partial}{\partial p},\ q, p\right) = \sum_{r,\, s=1}^{\infty} \frac{1}{r!\, s!} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial q_{i_1}}\right) \ldots$$
$$\ldots \left(-\frac{\partial}{\partial q_{i_r}}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial p_{j_1}}\right) \ldots \left(-\frac{\partial}{\partial p_{j_s}}\right) \cdot K_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s}(q, p). \qquad (4)$$

При этом обобщенные диффузионно-скоростные коэффициенты $K_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s}$ имеют обычный смысл:

$$K_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s}(q, p) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} M \Delta q_{i_1} \cdot \ldots \cdot \Delta q_{i_r} \cdot \Delta p_{j_1} \cdot \ldots \cdot \Delta p_{j_s} \qquad (5)$$

в точке (q, p).

Сформулируем принцип временной симметрии для описанного процесса в фазовом пространстве. Если процесс первоначально марковский, то в обращенном времени $\widetilde{t}=-t$, как известно, он также является марковским и имеет вероятности перехода

$$W(\widetilde{q}, \widetilde{p}, \widetilde{t}; \widetilde{q}_0, \widetilde{p}_0, \widetilde{t}_0) =$$

$$= \frac{1}{w(\widetilde{q}_0, \widetilde{p}_0, -\widetilde{t}_0)} \cdot W(\widetilde{q}_0, \widetilde{p}_0, -\widetilde{t}_0; \widetilde{q}, \widetilde{p}, -\widetilde{t}) \cdot w(\widetilde{q}, \widetilde{p}, -\widetilde{t})$$

$$(\widetilde{t} = -\widetilde{t}_0;\ t_0 = -t;\ \widetilde{q} = q_0;\ \widetilde{p} = -p_0;\ \widetilde{q}_0 = q;\ \widetilde{p}_0 = -p).$$

Устремляя $t - t_0 \to 0$, получаем

$$(\widetilde{F})_{\widetilde{q}\,\widetilde{p},\widetilde{q}'\widetilde{p}'} = \frac{1}{w(\widetilde{q}', \widetilde{p}', t)} (F)_{\widetilde{q}'\widetilde{p}',\widetilde{q}\,\widetilde{p}} \cdot w(\widetilde{q}, \widetilde{p}, t). \tag{6}$$

Принцип временной симметрии в механике заключается в требовании совпадения статистических свойств процессов в прямом и обратном времени, если добавить еще обращение импульсов. Заменив в операторе (5) знаки импульсов, получим исходный оператор F. Мы имеем, следовательно, формулу

$$(F)_{qp,q'p'} = \frac{1}{w(q', -p')} (F)_{q', -p', q, -p} \cdot w(q, -p).$$

Поменяв знаки у импульсов и вводя операцию транспонирования, это равенство можно записать в таком виде:

$$(F)_{q, -p, q', -p'} \cdot w(q', p') = [(F)_{q, p, q', p'}\, w(q', p')]^T. \tag{7}$$

Подставляя в него (4) и учитывая, что при транспонировании операторы дифференцирования меняют знак, получаем равенство

$$\sum_{r, s=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\, s!} \cdot \frac{\partial}{\partial q_{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial q_{i_r}} \cdot \frac{\partial}{\partial p_{j_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial p_{j_s}} \cdot K_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s}(q, -p) w(q, p) =$$

$$= w(q, p) \sum_{r, s=1}^{\infty} \frac{1}{r!\, s!} K_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s}(q, p) \frac{\partial}{\partial q_{i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial q_{i_r}} \cdot \frac{\partial}{\partial p_{j_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial p_{j_s}}. \tag{8}$$

В правой части этого равенства операторы дифференцирования переносим слева направо в соответствии с формулой

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_k} f = f \frac{\partial}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} \prod_{\beta \neq \alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \prod_{\gamma \neq \alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} + \ldots$$

Учитывая симметрию коэффициентов (5), правую часть равенства (8) при этом можно преобразовать так:

$$\sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{r} \sum_{m=0}^{s} \frac{(-1)^r}{l!\,(r-l)!\,m!\,(s-m)!} \frac{\partial^{l+m} [K_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s}(q, -p) w]}{\partial q_{i_1} \ldots \partial q_{i_l} \partial p_{j_1} \ldots \partial p_{j_m}} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial q_{i_{l+1}}} \ldots \frac{\partial}{\partial q_{i_r}} \frac{\partial}{\partial p_{j_{m+1}}} \ldots \frac{\partial}{\partial p_{j_s}}. \tag{9}$$

Приравняем порознь коэффициенты, стоящие при дифференциальных операторах в (9) и в правой части (8). Это дает следующие соотношения:

$$K_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}(q, p) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+l}}{l!\, m!} w^{-1}(q, p),$$

$$\frac{\partial^{l+m}[K_{i_1 \dots i_{r+l} j_1 \dots j_{s+m}}(q, -p)\, w(q, p)]}{\partial q_{r+1} \dots \partial q_{r+l}\, \partial p_{s+1} \dots \partial p_{s+m}}. \tag{10}$$

Последние служат обобщением соотношений (8) из [2] на тот случай, когда часть переменных A_1, A_2, ... при обращении времени меняет знак.

§ 2. Асимптотические результаты флуктуационно-диссипационной термодинамики

Формулы (10) являются точными в рамках принятых предположений. Из них можно вывести ряд точных соотношений в духе § 3 из [2]. Пойдем, однако, по другому пути. Соотношения флуктуационно-диссипационной термодинамики важны в первую очередь как асимптотические соотношения (в этом отношении имеется аналогия с равновесной термодинамикой). Поэтому представляется целесообразным явно ввести малый параметр и, используя его малость, получить основные результирующие соотношения как приближенные, асимптотические. Такой подход делает вывод основных результатов более простым и прозрачным с принципиальной точки зрения.

Будем предполагать, что коэффициенты (5) по порядку величины равны прогрессирующим степеням малого параметра ε:

$$K_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s} = \varepsilon^{r+s-1} K^0_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}. \tag{11}$$

Распределение же вероятностей $w(q, p)$ предполагается «острым», т. е. имеет вид

$$w(q, p) = \text{const}\, e^{-\frac{g^0(q,p)}{\varepsilon}}. \tag{12}$$

В (11) и (12) предполагается, что K^0, g^0 имеют нулевой порядок ($K^0 \sim 1$, $g^0 \sim 1$) по ε. Для равновесного (стационарного) распределения $w_{\text{ст}}(q, p)$ формула (12) согласуется с (11), т. е. именно такой вид имеет решение стационарного уравнения (3), если в него подставить (11).

Подставим (11), (12) в (10) и после дифференцирования учтем лишь основные наибольшие члены относительно малого параметра ε. Это даст

$$K^0_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}(q, p) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+l}}{l!\, m!} K_{i_1 \dots i_{r+l} j_1 \dots j_{s+m}}(q, -p) \times$$

$$\times (-1)^{l+m} \frac{\partial g^0}{\partial q_{r+1}} \dots \frac{\partial g^0}{\partial q_{r+l}} \cdot \frac{\partial g^0}{\partial p_{s+1}} \dots \frac{\partial g^0}{\partial p_{s+m}} + O(\varepsilon),$$

или, если вернуться к первоначальным обозначениям,

$$K_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_s}(q, p) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+m}}{l!\, m!} K_{i_1 \dots i_{r+l} j_1 \dots j_{s+m}}(q, -p) \times$$

$$\times X_{r+1} \cdot \dots \cdot X_{r+l} \cdot Y_{s+1} \cdot \dots \cdot Y_{s+m}. \tag{13}$$

Здесь обозначено

$$X_i = -\frac{\partial \ln w(q, p)}{\partial q_i}; \quad Y_j = -\frac{\partial \ln w(q, p)}{\partial p_j}. \tag{14}$$

Формулы (14) представляют собой просто замену переменных — переход от q, p к соответствующим термодинамически сопряженным параметрам X, Y. В том частном случае, когда плотность распределения $w(q, p)$ четна по p, обращению времени, т. е. преобразованию $q \to q$, $p \to -p$, как видно из (14), отвечает преобразование $X \to X$, $Y \to -Y$. В этом случае, совершая указанную замену переменных, из (13) имеем

$$K_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s}(X, Y) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+m}}{l!\,m!} K_{i_1 \ldots i_{r+l} j_1 \ldots j_{s+m}}(X, -Y) \times$$
$$\times X j_{s+1} \cdot \ldots \cdot X j_{r+l} Y_{s+1} \cdot \ldots \cdot Y_{s+m}. \tag{15}$$

Это соотношение, если в нем изменить знак у Y, можно записать также в такой форме:

$$K_{i_1 \ldots i_r j_1 \ldots j_s}(X, -Y) = \sum_{l,\, m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r}}{l!\,m!} K_{i_1 \ldots i_{r+l} j_1 \ldots j_{s+m}}(X, Y) \times$$
$$\times X_{i_{r+1}} \ldots X_{i_{r+l}} Y_{j_{s+1}} \ldots Y_{j_{s+m}}. \tag{16}$$

В (16) и (17) хотя бы один из индексов r или l больше нуля, так как суммирование в (4) по r или l начинается с единицы. Покажем, однако, что справедливо также равенство

$$0 = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{1}{l!\,m!} K_{i_1 \ldots i_l j_1 \ldots j_m}(X, Y) \cdot X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_l} Y_{j_1} \cdot \ldots \cdot Y_{j_m}$$
$$(K_{i_1 \ldots i_l j_1 \ldots j_m} \equiv 0 \text{ при } l = m = 0), \tag{17}$$

соответствующее значениям $r = s = 0$. В самом деле, плотность распределения $w(q, p) = w_{\text{ст}}(q, p)$ предполагается равновесной, т. е. удовлетворяющей стационарному уравнению (3). Учитывая (4), его можно записать так:

$$\sum_{l,\, m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+m}}{l!\,m!} \frac{\partial^{l+m}}{\partial q_{i_1} \ldots \partial q_{i_l} \partial p_{j_1} \ldots \partial p_{j_m}} [K_{i_1 \ldots i_l j_1 \ldots j_m} w] = 0. \tag{18}$$

Те же самые рассуждения, которые привели от (10) к (13), позволяют из (18) получить (17).

§ 3. Дифференциальные соотношения. Результаты линейной термодинамики

Используем найденные равенства для получения соотношений различных порядков, играющих важнейшую роль во флуктуационно-диссипационной термодинамике. Будем классифицировать эти соотношения по количеству входящих в них индексов.

Одноиндексные соотношения. Продифференцировав (17) по X_i (и аналогично по Y_j) и положив $X=Y=0$, получаем такие одноиндексные соотношения

$$K_i(0, 0) = 0; \quad K_j(0, 0) = 0. \tag{I.1 а,б}$$

Эти соотношения носят тривиальный характер, они говорят, что равновесными значениями переменных X, Y являются нулевые значения.

Равенства (16) при $r=1$, $s=0$ и при $r=0$, $s=1$ также дают некоторые одноиндексные соотношения, а именно, взяв $r=1$, $s=0$ и положив $X=Y=0$, получаем $K_i(0, 0)=0$. Если же взять $r=0$, $s=1$ и положить $X=Y=0$, то члены в правой и левой частях равенства сократятся и мы получим тривиальное тождество. Таким образом, из (16) в данном отношении нельзя получить ничего нового по сравнению с (I.1 *а, б*).

Двухиндексные соотношения. Дифференцируя (17) по X_{i_1} и X_{i_2} и полагая $X=Y=0$, получаем соотношение

$$\frac{\partial K_{i_1}}{\partial X_{i_2}} + \frac{\partial K_{i_2}}{\partial X_{i_1}} = -K_{i_1 i_2} \quad \text{при } X = Y = 0. \tag{18}$$

Если же продифференцировать по X_i, Y_j (или Y_{j_1}, Y_{j_2}), то получим

$$\frac{\partial K_i}{\partial Y_j} + \frac{\partial K_j}{\partial X_i} = -K_{ij}; \tag{19}$$

$$\frac{\partial K_{j_1}}{\partial Y_{j_2}} + \frac{\partial K_{j_2}}{\partial Y_{j_1}} = -K_{j_1 j_2} \quad \text{при } X = Y = 0. \tag{20}$$

Возьмем (16) при $r=1$, $s=0$ (а затем при $r=0$, $s=1$). Для первых значений дифференцирование по X_{i_2} в нулевой точке дает

$$\frac{\partial K_{i_1}}{\partial X_{i_2}} = -\frac{1}{2} K_{i_1 i_2} \quad \text{при } X = Y = 0. \tag{II. 1а}$$

Аналогично дифференцирование по Y_j приводит к соотношению

$$K_{ij} = 0 \quad \text{при } X = Y = 0. \tag{II. 2б}$$

Для значений $r=0$, $s=1$ члены $K_j(X, \mp Y)$ вычитаются, и дифференцирование по X_i (а затем по Y_{j_2}) в нулевой точке приводит к таким соотношениям:

$$K_{ij} = 0 \quad \text{при } X = Y = 0; \quad \text{(II. 2б)} \qquad \frac{\partial K_{j_1}}{\partial Y_{j_2}} = -\frac{1}{2} K_{j_1 j_2} \quad \text{при } X = Y = 0. \tag{II. 1в}$$

Соотношения (II.1 а), (II.1 в) являются, очевидно, более сильными, чем (18), (20). Их можно назвать линейными соотношениями типа Найквиста, так как их содержание соответствует обычной линейной теории тепловых шумов и линейной флуктуационно-диссипационной теореме (неквантовый вариант). Из (II.1а) и (II.1в) в дополнение к (18), (20) следуют соотношения взаимности Онзагера:

$$\frac{\partial K_{i_1}}{\partial X_{i_2}} = \frac{\partial K_{i_2}}{\partial X_{i_1}} \quad \text{при } X = Y = 0; \quad \text{(II}'\text{.1а)} \qquad \frac{\partial K_{j_1}}{\partial Y_{j_2}} = \frac{\partial K_{j_2}}{\partial Y_{j_1}} \quad \text{при } X = Y = 0. \tag{II$'$. 1в}$$

Далее, комбинируя (19) и (20), получаем нечетные соотношения взаимности

$$\frac{\partial K_i}{\partial Y_j} = -\frac{\partial K_j}{\partial X_i} \quad \text{при } X = Y = 0. \tag{II. 1б}$$

Соотношениями (II.1а—в) и (II.2б) исчерпывается линейная флуктуационно-диссипационная теория в неквантовом варианте. Некоторые двухиндексные соотношения можно получить также из равенств (16) при значениях $r=2$, $s=0$, а также $r=1$, $s=1$ или $r=0$, $s=2$. Однако они не дают ничего нового. Именно они, взятые в нулевой точке, приводят соответственно к соотношениям

$$0 = 0, \quad K_{ij}(0, 0) = 0 \quad \text{и} \quad 0 = 0.$$

Дальнейшие результаты относятся уже к нелинейной (по отклонениям X, Y) флуктуационно-диссипационной теории.

§ 4. Некоторые результаты нелинейной теории. Трехиндексные соотношения

Описанную методику можно применять и далее для вывода соотношений, содержащих больше, чем два, индекса и относящихся к нелинейной термодинамике.

Рассмотрим трехиндексные соотношения. Полагая $r+s=3$ в (16) и приравнивая X, Y нулю, получаем

$$K_{i_1 i_2 i_3} = 0 \quad \text{(III. 3а)}; \qquad K_{ij_1j_2} = 0 \quad \text{(III. 3в)}$$
$$\text{при } X = Y = 0.$$

Возьмем равенство (16) при $r+s=2$. Трехиндексные соотношения тогда будут получаться однократным дифференцированием по X или по Y в нулевой точке. Часть выводимых таким образом соотношений повторит предыдущие. Новое соотношение даст $r=2$, $s=0$ (дифференцирование по Y_j ($r=s=1$) дифференцирование по X_{i_2}), а также $r=0$, $s=2$ (дифференцирование по X_{j_3}).

$$2K_{i_1i_2,j} + K_{i_1i_2j} = 0; \quad 2K_{i_1j,i_2} + K_{i_1i_2j} = 0;$$
$$2K_{i_1i_2,j_3} + K_{j_1j_2j_3} = 0.$$

Комбинируя последние, получим

$$K_{i_1i_2,j} = K_{i_1j,i_2} = K_{i_2j,i_1} = -\frac{1}{2} K_{i_1i_2j}; \tag{III. 2б}$$

$$K_{j_1j_2,j_3} = K_{j_2j_3,j_1} = K_{j_3j_1,j_2} = -\frac{1}{2} K_{j_1j_2j_3}. \tag{III. 2г}$$

Здесь и в дальнейшем используем обозначения

$$K_{i_1i_2,j} = \frac{\partial K_{i_1i_2}}{\partial Y_j}; \quad K_{i_1,i_2j} = \frac{\partial^2 K_{i_1}}{\partial X_{i_2}\,\partial Y_j} \quad \text{при } X = Y = 0$$

и т. д., т. е. индекс i, стоящий после запятой, обозначает производную по четной переменной X_i, а индекс j — производную по нечетной переменной Y_j в нулевой точке.

Из равенства (16) при $r=1$, $s=0$ после двукратного дифференцирования запишем

$$2K_{i_1,i_2i_3}+K_{i_1i_2,i_3}+K_{i_1i_3,i_2}=0; \tag{21}$$

$$2K_{i,j_1j_2}+K_{ij_1,j_2}+K_{ij_2,j_1}=0; \tag{22}$$

здесь учтены также (III.3а, б, в). Если же в (16) положить $r=0$, $s=1$, то двукратное дифференцирование дает

$$2K_{j_1,j_2i}+K_{j_1j_2,i}+K_{j_1i,j_2}=0 \tag{23}$$

(соотношения, дублирующие полученные ранее, не выписаны).

Как показано в [3], из (21) вытекают соотношения

$$K_{i_1i_2,i_3}=K_{i_3,i_1i_2}-K_{i_1i_3,i_2}-K_{i_2i_3,i_1}. \tag{III. 1а}$$

Получив

$$2K_{j_2,j_1i}+K_{j_1j_2,i}+K_{j_2i,j_1}=0 \tag{24}$$

заменой индексов j_1, j_2 в (23) и разрешая (22), (23), (24) как систему трех уравнений относительно трех неизвестных $K_{j_1j_2,i}$, K_{ij_1,j_2}, K_{ij_2,j_1}, аналогичным образом получаем

$$K_{j_1j_2,i}=K_{i,j_1j_2}-K_{j_1,j_2i}-K_{j_2,j_1i}, \tag{III. 1в}$$

$$K_{ij_1,j_2}=K_{j_2,j_1i}-K_{i,j_1j_2}-K_{j_1,j_2i}.$$

Остается использовать, наконец равенство (17) ($r=s=0$), дифференцируя его в нулевой точке три раза. Это дает четыре соотношения, два из которых (дифференцирование по X_{i_1} X_{i_2}, X_{i_3} и по X_i, Y_{i_1}, Y_{i_2}) удовлетворяются в силу (III.3а, в) и (III, Iа, в), а два других в силу (III.1б, г) принимают вид

$$K_{i_1i_2,j}=K_{i_1j,i_2}=-K_{i_1,i_2j}-K_{i_2,i_1j}-K_{j,i_1i_2}; \tag{III. 1б}$$

$$K_{j_1,j_2j_3}=-K_{j_1,j_2j_3}-K_{j_2,j_1j_3}-K_{j_3,j_1j_2} \tag{III. 1г}$$

Тем самым перечислены все независимые трехиндексные соотношения. Из них видно, что все трехиндексные флуктуационные характеристики — диффузионные коэффициенты третьего порядка $K_{\alpha\beta\gamma}$ (в нулевой точке) и производные $K_{\alpha\beta,\gamma}$ от обычных диффузионных коэффициентов $K_{\alpha\beta}$ (здесь α, β, γ совпадают с i или с j) удается полностью выразить через трехиндексные диссипационные характеристики $K_{\alpha,\beta\gamma}$, определяемые из феноменологических уравнений. В этом отношении (неквантовая) трехиндексная нелинейная теория напоминает двухиндексную (линейную) теорию. Конкретный же вид формул для четного числа четных индексов отличается от вида, соответствующего нечетному числу их.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л. ЖЭТФ, 39, вып. 6 (12), 1647—1659, 1960.
2. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 16—29, 1962.
3. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 84—89, 1967.
4. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 1, 40—46, 1969.

Поступила в редакцию
12.5 1969 г.

Кафедра
общей физики для мехмата