Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1970

В. С. ЗАМИРАЛОВ, Г. И. ШЕПЕЛЕВ

РАЗЛОЖЕНИЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ПО ГРУППЕ 0(4) ПРИ НЕРАВНЫХ МАССАХ

Введено понятие асимптотической малой группы 0(4), благодаря которому можно написать разложение спиральных амплитуд t-канала при неравных массах внешних частиц по 0(4). Это разложение служит для определения кинематических факторов спиральных амплитуд при рассеянии вперед на больших энергиях.

В последнее время много внимания уделяется разложению спиральных амплитуд, заданных как функции на малой группе при фиксированном переданном импульсе в точке $t=0$ (s и t — квадраты энергии и импульса передачи в системе центра масс s канала) [1, 2]. Это связано с тем, что в случае (попарно) равных масс при $t=0$ группой инвариантности спиральной амплитуды в области физических s является группа Лоренца 0 (3, 1); а при s, заключенных между порогом и псевдопорогом, — группа 0(4). Поэтому спиральные амплитуды можно разлагать по унитарным неприводимым представлениям этих малых групп.

Область физических приложений, однако, ограничивается в этом случае процессами упругого и квазиупругого рассеяния [1, 2]. При неравных массах внешних частиц импульс передачи в нуль не обращается, а его квадрат достигает минимального значения $t_{\min}$ при рассеянии вперед; так что мы не можем написать разложения по 0(3,1) или 0(4), не продолжая частицы по массе [3—6]. Если же попытаться разложить амплитуду по полной системе собственных функций 0 (4), а затем перейти к пределу $t \to 0$, $s \to \infty$, то оказывается, что вклад недиагональных членов не исчезает, поэтому даже в этом пределе нельзя говорить об инвариантности амплитуды относительно 0 (4) [7]. Это привело к появлению схем нарушения симметрии [8, 9]. Мы предлагаем еще одну возможность.

Физически представляется очевидным, что при высоких энергиях разность масс должна стать несущественной. Поэтому попытаемся следующим образом определить понятие асимптотической малой группы 0 (3, 1) в физической области реакции вперед. Определим спиральную амплитуду как функцию на малой группе 0 (3, 1) при некотором фиксированном импульсе, который исчезает при $t_{\min}$ и к которому при асимптотических s стремится импульс передачи. Кроме того, чтобы иметь возможность в дальнейшем работать с компактной группой, определим понятие асимптотической малой группы 0 (4) при том же импульсе и нефизических s, область значений которых мы укажем при выборе этого импульса. Разложение по O (4) удобно тем, что непосредственно связывается с разложением спиральной амплитуды по O (3) в обычной реджистике [2, 10]. Отметим, что операторы Казимира представлений O (4) будут иметь обычный физический смысл только при больших s. Для построения искомого импульса рассмотрим кинематику реакции $1+\bar{2}\to\bar{3}+4$. Здесь i-тая частица имеет массу m_i, спин s_i, спиральность λ_i и 4-импульс q_i, который можно параметризовать сферическими углами φ_i, θ_i и гиперболическим углом γ_i:

$$q_i = m_i(\operatorname{ch}\gamma_i,\ \operatorname{sh}\gamma_i \sin\theta_i \cos\varphi_i,\ \operatorname{sh}\gamma_i \sin\theta_i \sin\varphi_i,\ \operatorname{sh}\gamma_i \cos\theta_i). \qquad (1)$$

В системе центра масс t-канала (t-с. ц. м.) выберем плоскость реакции таким образом, чтобы $\varphi_i = 0$, $\theta_1 = \theta_3 = \theta_t$, $\theta_2 = \theta_4 = 0$ [11]:

$$\begin{aligned} q_1 &= -m_1(\operatorname{ch}\gamma_1,\ \operatorname{sh}\gamma_1 \sin\theta_t,\ 0,\ \operatorname{sh}\gamma_1\cos\theta_t),\\ q_2 &= m_2(\operatorname{ch}\gamma_2,\ 0,\ 0,\ \operatorname{sh}\gamma_2),\\ q_3 &= m_3(\operatorname{ch}\gamma_3,\ \operatorname{sh}\gamma_3 \sin\theta_t,\ 0,\ \operatorname{sh}\gamma_3\cos\theta_t),\\ q_4 &= -m_4(\operatorname{ch}\gamma_4,\ 0,\ 0,\ \operatorname{sh}\gamma_4), \end{aligned} \qquad (2)$$

причем

$$m_1 \operatorname{sh}\gamma_1 + m_3 \operatorname{sh}\gamma_3 = m_2 \operatorname{sh}\gamma_2 + m_4 \operatorname{sh}\gamma_4 = 0,$$

а γ_i выражаются через $t = (q_1 - q_3)^2$ по формулам

$$\operatorname{ch}\gamma_i = \frac{t + m_i^2 - m_j^2}{2m_i\sqrt{t}};\quad \operatorname{sh}\gamma_{1,3} = \frac{k_t}{m_{1,3}};\quad \operatorname{sh}\gamma_{2,4} = \frac{p_t}{m_{2,4}},$$

где $i = 1, 2, 3, 4$ соответствуют $j = 3, 4, 1, 2$,

$$\begin{aligned} k_t &= \frac{[t-(m_1-m_3)^2]^{1/2}\,[t-(m_1+m_3)^2]^{1/2}}{2\sqrt{t}},\\ p_t &= \frac{[t-(m_2-m_4)^2]^{1/2}\,[t-(m_2+m_4)^2]^{1/2}}{2\sqrt{t}}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Определим вектора

$$p_1 = (q_1 + q_3^{\min})/2, \quad p_3 = (q_3 + q_1^{\min})/2,$$

где $q_{1,3}^{\min}$ — значения $q_{1,3}$ в t с. ц. м. при $t_{\min}$. Напомним, что при $s\to\infty$

$$t_{\min} \sim \frac{(m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)}{s} + O(s^{-2}). \qquad (4)$$

При асимптотических значениях s импульсы $p_{1,3}$ отличаются от импульсов $q_{1,3}$ на члены порядка s^{-1}. Разность этих векторов $(p_1 - p_3)$ стремится к импульсу передачи $(q_1 - q_3)$ и исчезает при $t = t_{\min}$, что и означает, что $(p_1 - p_3)$ является искомым импульсом. Все сказанное справедливо и для разности $(p_2 - p_4)$.

Для импульса $p_1 = p_3$ удобно при $t_{\min} < 0$ ввести параметризацию:

$$p_1^0 = p_3^0 = \frac{m_1^2 - m_3^2}{2i\sqrt{-t_{\min}}} \equiv iM\cos\gamma, \qquad (5)$$

причем

$$2M^2 = m_1^2 + m_3^2 - \frac{1}{2} t_{\min}.$$

Аналогично

$$p_2^0 = p_4^0 = \frac{m_2^2 - m_4^2}{2i\sqrt{-t_{\min}}} \equiv iM' \cos\gamma', \tag{6}$$

причем

$$2M'^2 = m_2^2 + m_4^2 - \frac{1}{2} t_{\min}.$$

Теперь можно разложить спиральную амплитуду t-канала по 0(4) при $t_{\min}$, т. е. $(p_1 - p_3) = (p_4 - p_2) = 0$ и нефизических s, $(M - M')^2 \ll s \ll \ll (M + M')^2$. Мы отсылаем читателя за подробным изложением разложения спиральной амплитуды по 0 (4) к интересной статье Фридмана и Вонга [2] и просто приведем здесь это разложение:

$$\langle \lambda_1 \lambda_3 | T | \lambda_2 \lambda_4 \rangle = (2\pi^2)^{-1} (-1)^{s_3 - \lambda_3 + s_4 - \lambda_4} \sum_{s=|s_1-s_3|}^{s_1+s_3} \sum_{s'=|s_2-s_4|}^{s_2+s_4} \times$$

$$\times \sum_{|M| \leqslant \min(s,s')} \sum_{n=\min(s,s')}^{\infty} \sum_{j=|M|}^{n} [(n+1)^2 - M^2] \times \tag{7}$$

$$\times \frac{C(s_1 s_3 s;\ \lambda_1 - \lambda_3)\, c(s_2 s_4 s';\ \lambda_2 - \lambda_4)}{[(2s+1)(2s'+1)]^{1/2}} d_{js\lambda}^{(n,M)*}(\gamma)\, T_{ss'}^{n,M}\, d_{js'\lambda'}^{(n,M)}(\gamma')\, d_{\lambda\lambda'}^{j}(\cos\theta_t),$$

где $\lambda = \lambda_1 - \lambda_3$, $\lambda' = \lambda_2 - \lambda_4$, n — четырехмерный момент, а M подразделяет состояния с определенным n на классы [12]; $d_{js\lambda}^{(n,M)}$ и $d_{\lambda\lambda'}^{j}$ — собственные функции 4 и 3-вращений, соответственно, а

$$\cos\theta_t = \frac{2st + t^2 - t\Sigma_i m_i^2 + (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)}{\{[t - (m_1 - m_3)^2][t - (m_1 + m_3)^2][t - (m_2 + m_4)^2][t - (m_2 - m_4)^2]\}^{1/2}}.$$

Это разложение заменой $n = j + k$ [1, 2] непосредственно связывается с обычным разложением спиральной амплитуды по парциальным волнам в t-канале [13]:

$$\langle \lambda_1 \lambda_3 | T | \lambda_2 \lambda_4 \rangle = \Sigma_j (2j+1)\, \Phi_{\lambda_1\lambda_3,\lambda_2\lambda_4}^{j}(t)\, d_{\lambda\lambda'}^{j}(\cos\theta_t). \tag{8}$$

Для выяснения асимптотического поведения спиральной амплитуды по s следует совершить аналитическое продолжение по n и соответственно по j в комплексной n- и j-плоскости, произвести преобразование Ватсона — Зоммерфельда и развернуть контур интегрирования. В дальнейшем предположим, что при этом в n- и j-плоскостях имеются только простые полюса.

При $|t| > |t_{\min}|$ и $s \to \infty$ аргумент функций $d_{\lambda\lambda'}^{j}(\cos\theta_t)$ стремится к бесконечности, и можно найти асимптотику спиральных амплитуд в (8) и перейти к пределу $t \to t_{\min}$ [14].

Выясним теперь поведение парциальных амплитуд при $\theta_s = 0$ и $s \to \infty$ в предположении, что приведенные амплитуды $T_{ss'}^{(n,M)}$ не имеют кинематических особенностей при $t_{\min} \to 0$. Тогда кинематические особенности парциальных амплитуд полностью определяются поведением функций $d_{js\lambda}^{(j+k,M)}(\gamma)$ при $t \to 0$. Аргумент этих функций, как видно из (5), (6), стремится к бесконечности, поэтому, воспользовавшись их известной асимптотикой [1], получим

$$d_{js\lambda}^{(j+k,M)}(\gamma)\, T_{ss'}^{(j+k,M)}\ \ d_{js'\lambda'}^{(j+k,M)}(\gamma') \sim (\cos\gamma)^{j-|M-\lambda|+k} (\cos\gamma')^{j-|M-\lambda'|+k}, \tag{9}$$

откуда

$$\Phi^{j}_{\lambda_1\lambda_3\lambda_2\lambda_4} \sim \sum_M (-t)^j\,(\sqrt{-t})^{|M-\lambda|+|M-\lambda'|}. \tag{10}$$

Здесь мы неявно предположили существование дочерних траекторий [14], чтобы устранить сингулярности вида $(\sqrt{-t})^{-k}$ в парциальных амплитудах. В случае равных масс вычеты полюсов при $k\neq 0$ несингулярны, и необходимости во введении дочерних траекторий не возникает.

Полученные выражения (9), (10) позволяют определить поведение спиральной амплитуды реакции вперед при больших s. При всех неравных массах и $\theta_s=0$

$$\langle\lambda_1\lambda_3\,|\,T\,|\,\lambda_2\lambda_4\rangle \sim \sum_M (\sqrt{-t})^{|M-\lambda|+|M-\lambda'|}, \tag{11}$$

если две массы равны, е. g, $m_2=m_4$, то

$$\langle\lambda_1\lambda_3\,|\,T\,|\,\lambda_2\lambda_4\rangle \sim \sum_M (\sqrt{-t})^{|M-\lambda|}, \tag{12}$$

$$\lambda=\lambda_1-\lambda_3,$$

если же массы (попарно) равны, то мы возвращаемся к разложению Фридмана и Вонга [2].

Таким образом, асимптотическая малая группа 0 (4) амплитуды рассеяния позволила, при определенных предположениях, выяснить поведение спиральных амплитуд вперед при $s\to\infty$.

Авторы искренне благодарны Н. Г. Атакишиеву, А. А. Макарову, Р. М. Мир-Касимову, М. В. Савельеву, Л. Д. Соловьеву и М. Т. Шефтелю за интересные обсуждения. В. С. Замиралов особо благодарит проф. Нгуен Ван Хьеу за увлекательную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Toller M. Il Nuovo Cim., **53 A**, 671, 1968.
2. Freedman D. Z., Wang J.-M. Phys. Rev., **160**, 1560, 1967.
3. Sawyer R. F. Phys. Rev., **167**, 1372, 1968.
4. Mitter P. K. Phys. Rev., **162**, 1624, 1968.
5. Замиралов В. С., Шепелев Г. И. Препринт ИФВЭ, 68—46-к, 1968.
6. Замиралов В. С. Препринт ИФВЭ, 69—15-к, 1969.
7. Domokos G. Phys. Rev., **159**, 1387, 1967; Domokos G., Tindle G. L. Phys. Rev., **165**, 1906, 1968.
8. Bronzan J. B. Phys. Rev., **180**, 1423, 1969.
9. Cosenza G., Sciarrino A., Toller M. Il Nuovo Cim., **57A**, 253, 1968, ibid., **62A**, 1969.
10. Frautschi S. C., Gell-Mann M., Zachariasen F. Phys. Rev., **126**, 2204, 1962.
11. Boyce J. F. J. Math. Phys., **8**, 675, 1967.
12. Freedman D. Z., Wang J.-M. Phys. Rev. Lett., **18**, 863, 1967.
13. Jacob M., Wick G. C. Ann. Phys., **7**, 404, 1959.
14. Freedman D. Z., Wang J.-M. Phys. Rev., **153**, 1956, 1967.

Поступила в редакцию
7.10 1969 г.

НИИЯФ