Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1970

УДК 538.3:530.145

Ю. М. ЛОСКУТОВ, В. П. ЛЕВЕНТУЕВ

ВЛИЯНИЕ АНОМАЛЬНЫХ МАГНИТНОГО И ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО (ПРЕДПОЛАГАЕМОГО) МОМЕНТОВ НА ПОВЕДЕНИЕ СПИНА ФЕРМИ-ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе получены решения обобщенного уравнения Дирака для частицы, обладающей аномальными магнитным и электрическим моментами и находящейся в однородном магнитном поле. Введены операторы проекции «спина» на произвольную, фиксированную относительно направлений магнитного поля и импульса ось. Рассмотрена прецессия спина, возникающая при наличии у частицы аномальных магнитного и электрического моментов.

Вопрос о наличии у элементарных частиц аномального электрического момента является хотя и дискуссионным [1], однако имеет принципиальное значение, поскольку наличие у элементарных частиц аномального электрического момента приводило бы к нарушению CP-инвариантности электромагнитных взаимодействий. Аномальный электрический момент должен был бы оказать влияние на поведение спина частицы при ее движении в магнитном поле. Качественное рассмотрение этого эффекта по классической теории легло в основу серии экспериментов по обнаружению у элементарных частиц аномального электрического момента [1]. В настоящей работе на основе точного решения обобщенного уравнения Дирака прецессия спина в магнитном поле, возникающая благодаря наличию у частицы аномальных магнитного и электрического моментов, рассмотрена последовательно методами квантовой теории.

Обобщенный лагранжиан взаимодействия частицы с внешним электромагнитным полем имеет вид

$$\mathcal{L} = e\,\psi^+ \alpha_\mu A_\mu \psi + \frac{1}{2}\mu\psi^+ \alpha_{\mu\nu} H_{\mu\nu}\psi + \frac{i}{2}\varepsilon\psi^+\rho_1\alpha_{\mu\nu} H_{\mu\gamma}\psi; \qquad (1)$$

здесь $A_\mu\left\{-\frac{y}{2}\mathcal{H};\ \frac{x}{2}\mathcal{H};\ 0;\ 0\right\}$ — 4-потенциалы внешнего однородного магнитного поля (направленного вдоль оси z);

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \qquad (2)$$

e — заряд частицы ($e \gtrless 0$; μ и ε — величины аномальных магнитного и электрического моментов; $\alpha_\mu\{\vec{\alpha},\ iI\}$, ρ_i — матрицы Дирака; $\alpha_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор второго ранга:

$$\alpha_{\mu\nu} = -\alpha_{\nu\mu} = \begin{cases} i\alpha_\mu \rho_3 \alpha_\nu & \mu \neq \nu \\ 0 & \mu = \nu, \end{cases} \tag{3}$$

$i\rho_1 \alpha_{\mu\nu}$ — псевдотензор второго ранга. Наличие в (1) псевдоскалярного члена (при $\varepsilon \neq 0$) приводит к нарушению CP-инвариантности лагранжиана электромагнитного взаимодействия. Используя (1), получаем обобщенное уравнение Дирака

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi,$$

$$H = c(\vec{\alpha}\vec{P}) + \rho_3 m_0 c^2 + \mu\rho_3(\vec{\sigma}\vec{\mathscr{H}}) + \varepsilon\rho_2(\vec{\sigma}\vec{\mathscr{H}}). \tag{4}$$

Следуя методам построения поляризационных операторов, изложенным, например, в [2], рассмотрим функционал

$$J(\gamma) = \frac{c}{2}\int \psi^+ (\gamma P_\lambda + P_\lambda \gamma)\psi\, dS_\lambda,$$

где γ — некоторая ковариантная комбинация матриц Дирака; S_λ — гиперповерхность в четырехмерном пространстве. Выбирая гиперповерхность S_λ плоской, совпадающей с трехмерным объемом, получим[1]:

$$J(\gamma) = \frac{1}{2c}\int \psi^+ (\gamma H + H\gamma)\psi\, d^3x,$$

где ψ и H определяются формулами (4).

Отдельные компоненты входящего сюда оператора

$$\gamma \equiv \frac{1}{2c}(\gamma H + H\gamma)] \tag{5}$$

играют роль известных поляризационных операторов. Полагая, например,

$$\hat{\gamma} = \sigma_\mu = \{\vec{\sigma}, i\rho_1\},$$

находим псевдовектор поляризации

$$S_\mu = \{\vec{S}, iS_t\}, \tag{6}$$

$$\vec{S} = \rho_1 \vec{P} + m_0 c \rho_3 \vec{\sigma} + \frac{\mu \vec{\mathscr{H}}}{c}\rho_3 + \frac{\varepsilon \vec{\mathscr{H}}}{c}\rho_2; \quad S_t = (\vec{\sigma}\vec{P}). \tag{7}$$

При замене γ антисимметричным тензором второго ранга $\left(\alpha_{\mu\nu} - \frac{\mu}{E} H_{\mu\nu}\right)$ получим

$$\Pi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Pi_{23} & \Pi_{31} & \Pi_{12} \\ \Pi_{14} & \Pi_{24} & \Pi_{34} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\Pi} \\ i\vec{\Phi} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$\vec{\Pi} = m_0 c \vec{\sigma} + \rho_2 [\vec{\sigma}\vec{P}] - \frac{\varepsilon}{c}\rho_1 [\vec{\sigma}\vec{\mathscr{H}}], \tag{9}$$

[1] Поскольку гамильтониан H при $\varepsilon \neq 0$ содержит псевдоскалярные члены, тензорная размерность введенного функционала не будет совпадать с тензорной размерностью матриц γ (отличие скажется при преобразованиях инверсии координат). Поэтому названия введенных ниже поляризационных операторов будут носить несколько условный характер.

$$\vec{\Phi} = -\rho_3 [\vec{\sigma}\,\vec{P}] + \frac{\mu}{c}\,\rho_1 [\vec{\sigma}\,\vec{\mathcal{H}}] + \frac{\varepsilon}{c}\,\vec{\mathcal{H}}. \tag{10}$$

Непосредственный физический смысл здесь имеет четвертый компонент псевдовектора поляризации

$$S_t = (\vec{\sigma}\vec{P}), \tag{11}$$

описывающий проекцию спина частицы на ее импульс, и оператор

$$\Pi_{12} = \frac{1}{2\mathcal{H}}\,\Pi_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = m_0 c\sigma_3 + \rho_2 [\vec{\sigma}\,\vec{P}]_3, \tag{12}$$

описывающий поляризационные состояния частицы относительно магнитного поля.

Выбирая, наконец, в качестве γ комбинацию

$$\gamma \equiv i\rho_1 \alpha_{\mu\nu} - \frac{\varepsilon}{E} H_{\mu\nu},$$

можно получить псевдотензор

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R_{23} & R_{31} & R_{12} \\ R_{14} & R_{24} & R_{34} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{R} \\ i\vec{\chi} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\vec{R} = -\rho_3 [\vec{\sigma}\,\vec{P}] + \frac{\mu}{c}\,\rho_1 [\vec{\sigma}\,\vec{\mathcal{H}}], \tag{14}$$

$$\vec{\chi} = -m_0 c\vec{\sigma} - \rho_2 [\vec{\sigma}\,\vec{P}] - \frac{\mu\vec{\mathcal{H}}}{c} + \frac{\varepsilon}{c}\,\rho_1 [\vec{\sigma}\,\vec{\mathcal{H}}]. \tag{15}$$

Физический смысл здесь имеет псевдоскалярный оператор

$$R_{12} = \frac{1}{2\mathcal{H}} R_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = -\rho_3 [\vec{\sigma}\,\vec{P}]_3, \tag{16}$$

описывающий проекцию «спина» на направление $\vec{j} \parallel [\vec{\mathcal{H}}\,\vec{P}]$, перпендикулярное направлению магнитного поля и импульса частицы.

Пользуясь (11), (12) и (16), введем оператор

$$L = g_3\Pi_0 + g_2 R_0 + g_1 S_0, \tag{17}$$

где

$$\Pi_0 = \frac{m_0 c\,\sigma_3 + \rho_2 [\vec{\sigma}\,\vec{P}]_3}{\hbar\sqrt{4qn + k_0^2}}, \tag{18}$$

$$R_0 = -\frac{\rho_3 [\vec{\sigma}\,\vec{P}]_3}{\hbar\sqrt{4qn}}, \tag{19}$$

$$S_0 = \frac{(\vec{\sigma}\,\vec{P})}{\hbar\sqrt{4qn + k_3^2}}, \tag{20}$$

$q = e_0\mathcal{H}/2c\hbar$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — главное квантовое число, а коэффициенты g_1, g_2, g_3 удовлетворяют условию

$$g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = 1. \tag{21}$$

В случае отсутствия у частицы аномальных моментов ($\mu=\varepsilon=0$) оператор L коммутирует с гамильтонианом (4) и, следовательно, соответствует интегралу движения при любых значениях коэффициентов g_1, g_2 и g_3. Собственные значения оператора L равны $\xi=\pm 1$ ($L\psi=\xi\psi$).

Таким образом, L можно интерпретировать как оператор, соответствующий проекции «спина» на ось, составляющую с направлениями магнитного поля, импульса и с направлением $\vec{j}$ углы, косинусы которых равны соответственно g_3, g_1 и g_2. Эта проекция «спина» на произвольное фиксированное относительно импульса и магнитного поля направление будет оставаться неизменной со временем[1]. При наличии у частицы только аномального магнитного момента ($\mu\neq 0$, $\varepsilon=0$) оператор L будет коммутировать с гамильтонианом лишь при $g_1=g_2=0$, т. е. будет сохраняться лишь проекция «спина» на направление магнитного поля. Наоборот, в случае $\mu=0$, $\varepsilon\neq 0$ сохранялась бы лишь проекция «спина» на направление $\mathbf{j}$.

В общем случае ($\mu\neq 0$, $\varepsilon\neq 0$) интегралом движения будет оператор

$$L_0=\frac{\mu\,(m_0c\sigma_3+\rho_2\,[\vec{\sigma}\,\vec{P}]_3)-\varepsilon\rho_3\,[\vec{\sigma}\,\vec{P}]_3}{\hbar\sqrt{(4qn+k_0^2)\,\mu^2+4qn\varepsilon^2}}, \tag{22}$$

соответствующий проекции «спина» на ось, направляющие косинусы которой равны

$$g_3^0=\frac{\mu\sqrt{4qn+k_0^2}}{\sqrt{(4qn+k_0^2)\,\mu^2+4qn\,\varepsilon^2}},\quad g_2^0=\frac{\varepsilon\sqrt{4qn}}{\sqrt{(4qn+k_0^2)\,\mu^2+4qn\,\varepsilon^2}},\quad g_1^0=0. \tag{23}$$

Подчиняя волновую функцию $\psi(\vec{r}, t)$ дополнительному уравнению

$$L_0\,\psi=\xi\psi, \tag{24}$$

в качестве совместного решения (4) и (24) получим

$$\psi(\vec{r}, t)=e^{-icKt}\,\frac{e^{ik_3z}}{\sqrt{L}}\,\frac{e^{il\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\,\sqrt{2q}\begin{Bmatrix} C_1e^{-\frac{i\varphi}{2}}\,I_{n-1,\,s}(qr^2)\\ iC_2e^{\frac{i\varphi}{2}}\,I_{n,s}(qr^2)\\ C_3e^{-\frac{i\varphi}{2}}\,I_{n-1,s}(qr^2)\\ iC_4e^{\frac{i\varphi}{2}}\,I_{n,s}(qr^2)\end{Bmatrix}. \tag{25}$$

Здесь L — длина периодичности вдоль оси z,

$$I_{n,\,s}(x)=\frac{1}{\sqrt{n!s!}}\,e^{-\frac{x}{2}}\,x^{\frac{n-s}{2}}\,Q_s^{n-s}(x),$$

[1] В приближении ($\mu=\varepsilon=0$) можно считать, что векторы спина, импульса и напряженности магнитного поля образуют жесткую тройку, вращающуюся (при движении частицы) вокруг вектора магнитного поля.

$Q_s^{n-s}(x)$ — обобщенные полиномы Лагерра, l и s — орбитальное и радиальное квантовые числа,

$$K = \sqrt{4qn + k_0^2 + k_3^2 + \left(\frac{\mu\mathcal{H}}{c\hbar}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon\mathcal{H}}{c\hbar}\right)^2 + \overline{+ 2\xi\sqrt{(4qn + k_0^2)\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{c\hbar}\right)^2 + 4qn\left(\frac{\varepsilon\mathcal{H}}{c\hbar}\right)^2}}}, \tag{26}$$

$\xi = \pm 1$, а спиновые коэффициенты C_i имеют вид

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \xi\frac{k_0\mu}{a}\right)}\left(\sqrt{1 + \frac{k_3}{K}}\, e^{-\frac{i\xi Q}{2}} + \xi\Delta\sqrt{1 - \frac{k_3}{K}}\, e^{\frac{i\xi Q}{2}}\right) \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \xi\frac{k_0\mu}{a}\right)}\left(\sqrt{1 + \frac{k_3}{K}}\, e^{-\frac{i\xi Q}{2}}\xi\Delta - \sqrt{1 - \frac{k_3}{K}}\, e^{\frac{i\xi Q}{2}}\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \xi\frac{k_0\mu}{a}\right)}\left(\sqrt{1 + \frac{k_3}{K}}\, e^{-\frac{i\xi Q}{2}} - \xi\Delta\sqrt{1 - \frac{k_3}{K}}\, e^{\frac{i\xi Q}{2}}\right) \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \xi\frac{k_0\mu}{a}\right)}\left(\sqrt{1 + \frac{k_3}{K}}\, e^{-\frac{i\xi Q}{2}}\xi\Delta + \sqrt{1 - \frac{k_3}{K}}\, e^{\frac{i\xi Q}{2}}\right) \end{pmatrix}, \tag{27}$$

где

$$a = \sqrt{(4qn + k_0^2)\,\mu^2 + 4qn\,\varepsilon^2}, \qquad \Delta = \sqrt{\frac{\mu - i\varepsilon}{\mu + i\varepsilon}},$$

$$\sin Q = k_0\varepsilon / \sqrt{(K^2 - k_3^2)(\mu^2 + \varepsilon^2)}\,.$$

Исследуем с помощью полученных решений влияние аномальных магнитного и электрического моментов на поведение «спина» частицы в однородном магнитном поле. Предположим, что в начальный момент времени «спин» имел определенное значение проекции на некоторую ось $\vec{\lambda}(g_1, g_2, g_3)$.

Найдем среднее значение оператора проекции «спина» L' на ось $\vec{\lambda}'\,(g_1', g_2', g_3')$:

$$s_{\lambda'}(t) = \int \Psi^+(\vec{r}, t)\, L'\, \Psi(\vec{r}, t)\, d^3x. \tag{28}$$

Представляя $\Psi(r, t)$ в виде

$$\Psi(\vec{r}, t) = C_+\psi_+ e^{-icK_+ t} + C_-\psi_- e^{-icK_- t} \tag{29}$$

и учитывая, что при $t=0$

$$L\Psi(\vec{r},0)=\eta\Psi(\vec{r},0); \tag{30}$$

для коэффициентов $C_{\pm}$ с точностью до величин $(\mu\mathcal{H}/m_0c^2)$ и $(\varepsilon\mathcal{H}/m_0c^2)$ получим

$$C_{\pm}=\frac{(g_3g_2^0-g_3^0g_2\mp g_2-\eta g_2^0)\sqrt{1\mp g_3^0}\mp ig_1g_2^0\sqrt{1\pm g_3^0}}{2g_2^0\sqrt{1-\eta g_3}}, \tag{31}$$

где $\eta=\pm 1$.

Отсюда с помощью (28) находим

$$\begin{aligned} s_{\lambda'}(t)=\eta\,\{g_3'[g_3^0(g_3g_3^0+g_2g_2^0)+g_2^0(g_3g_2^0-g_2g_3^0)\cos\omega t-g_2^0g_1\sin\omega t]+\\ +g_2'[g_2^0(g_3g_3^0+g_2g_2^0)-g_3^0(g_3g_2^0-g_2g_3^0)\cos\omega t+g_3^0g_1\sin\omega t]+\\ +g_1'[(g_3g_2^0-g_3^0g_2)\sin\omega t+g_1\cos\omega t]\}, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\omega=c(K_+-K_-);\quad K_{\pm}=K(\xi=\pm 1). \tag{33}$$

Формулу (32) можно интерпретировать как результат прецессии спина частицы с угловой скоростью ω вокруг фиксированной относительно направления магнитного поля и импульса оси, направляющие косинусы которой равны g_3^0, g_2^0, g_1^0. Очевидно, прецессия спина возникает исключительно благодаря наличию у частицы аномальных магнитного или электрического моментов. Прецессия спина за счет лишь магнитного момента рассматривалась ранее. (см., например, [3]). Наиболее отчетливо влияние на прецессию спина аномального электрического момента можно проследить в частном случае плоского движения ($k_3=0$) продольно поляризованной в начальный момент частицы. Рассмотрим, например, изменение проекции «спина» на направление магнитного поля [4].

Полагая в (32)

$$g_3=g_2=g_2'=g_1'=0,\quad g_3'=g_1=1,$$

получаем

$$s_3(t)=-\eta\frac{\varepsilon\sqrt{4qn}\sin\omega t}{\sqrt{(4qn+k_0^2)\mu^2+4qn\varepsilon^2}}. \tag{34}$$

Таким образом, наличие аномального электрического момента приводит к тому, что спин первоначально продольно поляризованной частицы со временем «выходит» из плоскости движения частицы, тем самым нарушая симметрию относительно этой плоскости. Исследуя экспериментально поведение спина частицы при ее движении в однородном магнитном поле, можно судить о наличии или отсутствии у нее аномального электрического момента.

В заключение авторы благодарят участников семинара проф. Соколова А. А. за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапиро Ф. Л. «Успехи физич. наук», 95, вып. 1, 145, 1968.
2. Сб. «Синхротронное излучение». М., «Наука», 1966.
3. Тернов И. М., Багров В. Г., Рзаев Р. А., Клименко Ю. И. «Изв. вузов», физика, 6, 111, 1964.
4. Лоскутов Ю. М., Левентуев В. П. «Изв. вузов», физика, № 6, 152, 1969.

Поступила в редакцию
22.12 1969 г.

Кафедра
теоретической физики