Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1970

О. ШАРШЕКЕЕВ

ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ «ВСЕЛЕННОЙ» ФРИДМАНА В ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Преобразована метрика Фридмана для случая $A=\sin\chi$; χ; $\operatorname{sh}\chi$. Определены скорости движения частицы и полная энергия.

В совместной с К. П. Станюковичем [1] статье «Модели «Вселенной» Фридмана в центрально-симметричной системе отсчета» был преобразован интервал

$$-ds^2 = -c^2\,d\tau^2 + a^2\,(d\chi^2 + A^2\,d\Omega^2),$$

где

$$A = \sin\chi;\ \chi;\ \operatorname{sh}\chi,\ d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2,$$

в результате которого можно записать следующие метрики.

Для пылевой замкнутой пульсирующей «эллиптической» модели:

$$-ds^2 = \left(-c^2\,dt^2\,\frac{\sqrt{R_0^2-R^2}-T}{R_0-T} + dr^2\right)\times$$

$$\times\,\frac{\sqrt{R_0^2-R^2}-T}{\sqrt{R_0^2-R^2}\,\dfrac{R_0^2-R^2}{R_0^2}-T} + r^2\,d\Omega^2, \qquad (1)$$

при этом $r = R\left(1-\dfrac{T}{\sqrt{R_0^2-R^2}}\right)$, где $T\,(ct)$ — произвольная функция,

и для ультрарелятивистской эллиптической модели:

$$-ds^2 = (-c^2\,dt^2 + dr^2)\,\frac{(R_0^2-R^2-c^2t^2)\,R_0^2}{(R_0^2-R^2)^2-R_0^2\,c^2t^2} + r^2\,d\Omega^2, \qquad (2)$$

при этом $r = R\sqrt{1-\dfrac{c^2t^2}{R_0^2-R^2}}$.

Для квазиевклидовой («параболической») открытой модели при $p=0$:

$$-ds^2 = c^2\,dt^2 \frac{\gamma^4 r^2}{\chi(\gamma^2 r-\chi^3)}\left(\frac{4}{9c^2 t^2 \gamma^4}\right)^{1/3} + dr^2\frac{\gamma^2 r}{\gamma^2 r-\chi^3} + r^2\,d\Omega^2, \qquad (3)$$

$$r=\chi\left(\frac{3ct}{2\gamma}\right)^{2/3}-\frac{\chi^3}{2\gamma^2},\quad \gamma=\frac{3c\tau_0}{2\sqrt{a_0^3}},$$

и при $p=\varepsilon/3$:

$$-ds^2=(-c^2\,dt^2+dr^2)\frac{4k^2r^2}{4k^2r^2-\chi^4}+r^2\,d\Omega^2, \qquad (4)$$

$$r=\chi\left(\frac{ct}{k}-\frac{\chi^2}{4k^2}\right)^{1/2},$$

где $k=c\tau_0/a_0^2$.

Для «гиперболической» открытой модели при $p=0$:

$$-ds^2=-c^2\,dt^2\frac{r^2T^2}{(r+2a_0\operatorname{sh}\chi)(r-2a_0\operatorname{sh}^3\chi)}+dr^2\frac{r}{r-2a_0\operatorname{sh}^3\chi}+r^2\,d\Omega^2, \qquad (5)$$

$$r=\operatorname{th}\chi\,T(ct)-2a_0\operatorname{sh}\chi$$

и при $p=\varepsilon/3$:

$$-ds^2=(-c^2\,dt^2+dr^2)\frac{r^2}{(r^2-a_0^2\operatorname{sh}^4\chi)}+r^2\,d\Omega^2, \qquad (6)$$

$$r=\operatorname{th}\chi\sqrt{c^2t^2+2a_0\,\mathrm{ct}-a_0^2\operatorname{sh}^2\chi}.$$

В данной работе исследуются модели «Вселенной» Фридмана в центрально-симметричной системе отсчета. Исходя из приведенных метрик, можно определить скорости движущейся частицы в данном поле и зависимость плотности энергии материи от переменных R, r, χ и ct. Для этого воспользуемся формулами

$$\frac{u}{c}=e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}\frac{\partial r}{c\,\partial t}, \qquad (7)$$

и

$$\frac{\partial(re^{-\lambda})}{\partial R}\frac{1}{\frac{\partial r}{\partial R}}=1-\frac{\varkappa r^2}{1-\frac{u^2}{c^2}}\left(\varepsilon+p\frac{u^2}{c^2}\right), \qquad (8)$$

где u — трехмерная скорость частицы [2].

В случае пылевой «эллиптической» модели Фридмана из (1) получаем

$$e^{\nu}=\frac{\left(\sqrt{R_0^2-R^2}-T\right)^2}{(R_0-T)\left(\sqrt{R_0^2-R^2}\,\frac{R_0^2-R^2}{R_0^2}-T\right)},$$

$$e^{\lambda}=\frac{\sqrt{R_0^2-R^2}-T}{\left(\sqrt{R_0^2-R^2}\,\frac{R_0^2-R^2}{R_0^2}-T\right)},$$

$$\dot{r} = R\left(1 - \frac{T}{\sqrt{R_0^2 - R^2}}\right).$$

Тогда

$$\frac{u}{c} = -\frac{\sqrt{R - T}}{r\left(\sqrt{R_0^2 - R^2 - T}\right)^{1/2}}\,\frac{R\dot{T}}{\sqrt{R_0^2 - R^2}},$$

где $T = -\sqrt{\dfrac{T}{R_0 - T}}$, поэтому

$$\frac{u}{c} = R\sqrt{\frac{R - r}{r\left(R_0^2 - R^2\right)}} \quad \text{или} \quad \frac{u}{c} = \frac{\operatorname{tg}\chi}{\sqrt{\left(\dfrac{R_0}{T}\right)\cos\chi - 1}} \tag{9}$$

и

$$\frac{\partial\left(re^{-\lambda}\right)}{\partial R}\,\frac{1}{\dfrac{\partial r}{\partial R}} =$$

$$= \frac{\sqrt{R_0^2 - R^2}\,\dfrac{R_0^2 - R^2}{R_0^2}\left(R_0^2 - 3R^2\right) - TR_0^2}{\left(R_0^2 - R^2\right)^{3/2} - TR_0^2}.$$

При этом из (8) после элементарных преобразований и при $p = 0$ получаем

$$\varkappa\varepsilon = \frac{3}{R_0^2}\left(\frac{R}{r}\right)^3. \tag{10}$$

Для ультрарелятивистской «эллиптической» модели Фридмана из (2) запишем

$$e^{\nu} = e^{\lambda} = \frac{\left(R_0^2 - R^2 - c^2t^2\right)R_0^2}{\left(R_0^2 - R^2\right)^2 - c^2t^2R_0^2}, \quad r = R\left(1 - \frac{c^2t^2}{R_0^2 - R^2}\right)^{1/2},$$

с помощью которых

$$\frac{u}{c} = -\frac{\operatorname{tg}\chi}{\sqrt{\dfrac{R_0^2}{c^2t^2}\cos^2\chi - 1}} \tag{11}$$

и

$$\frac{\partial\left(re^{-\lambda}\right)}{\partial R}\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial r}{\partial R}} = \frac{\left[\left(R_0^2 - R^2\right)^2 - c^2t^2R_0^2\right]\left(R_0^4 - c^2t^2R_0^2 - R^4\right)}{R_0^2\left(R_0^2 - R^2 - c^2t^2\right)\left[\left(R_0^2 - R^2\right)^2 - c^2t^2R_0^2\right]} -$$

$$- \frac{4R^2\left(R_0^2 - R^2\right)\left[\left(R_0^2 - R^2\right)^2 - c^2t^2\left(R_0^2 - R^2\right)\right]}{R_0^2\left(R_0^2 - R^2 - c^2t^2\right)\left[\left(R_0^2 - R^2\right)^2 - c^2t^2R_0^2\right]}.$$

Таким образом, из (8) следует, что

$$\varkappa\varepsilon = \frac{3}{R_0^2}\left(\frac{R}{r}\right)^4. \tag{12}$$

В случае пылевой квазиевклидовой («параболической») открытой модели Фридмана из (3) получаем

$$e^{\nu}=\frac{\gamma^4 r^2}{\chi(\gamma^2-r-\chi^3)}\left(\frac{2}{3ct\gamma^2}\right)^{2/3},\quad e^{\lambda}=\frac{\gamma^2 r}{\gamma^2 r-\chi^3},\quad r=\chi\left(\frac{3ct}{2\gamma}\right)^{2/3}-\frac{\chi^3}{2\gamma^2}.$$

Откуда с помощью (7) можно записать

$$\frac{u^2}{c^2}=\frac{\chi^3}{\gamma^2 r}. \tag{13}$$

Произведя соответствующие вычисления, получим

$$\frac{\partial(re^{-\lambda})}{\partial\chi}\,\frac{1}{\partial r/\partial\chi}=\frac{\left[2\gamma^2\left(\frac{3ct}{2\gamma}\right)^{2/3}(\gamma^2 r-3\chi^3)-3\chi^2(\gamma^2 r-\chi^3)\right]}{\gamma^2 r\left[2\gamma^2\left(\frac{3ct}{2\gamma}\right)^{2/3}-3\chi^2\right]}.$$

Следовательно, подставляя это выражение в (8), придем к равенству

$$\varkappa\varepsilon=\frac{3}{\gamma^2}\left(\frac{\chi}{r}\right)^3. \tag{14}$$

Для ультрарелятивистской квазиевклидовой («параболической») открытой модели из метрики (4) следует:

$$e^{\nu}=e^{\lambda}=\frac{4k^2r^2}{4k^2r^2-\chi},\quad r=\chi\left(\frac{ct}{k}-\frac{\chi^2}{4k^2}\right)^{1/2}.$$

При этом

$$\frac{u}{c}=\frac{\chi}{\sqrt{4kct-\chi^2}}=\frac{\chi^2}{2kr} \tag{15}$$

и

$$\frac{\partial(re^{-\lambda})}{\partial\chi}\,\frac{1}{\partial r/\partial\chi}=\frac{\chi^2[(2kct-\chi^2)^2-2kct\chi^2]}{2k^2r^2(2kct-\chi^2)}.$$

Зависимость плотности энергии материи от r и χ будет иметь вид

$$\varkappa\varepsilon=\frac{3}{4k^2}\left(\frac{\chi}{r}\right)^4. \tag{16}$$

Аналогичным образом можно рассматривать и «гиперболическую» открытую модель Фридмана.

В случае, когда $p=0$, из интервала (5) следует

$$e^{\nu}=\frac{r^2\dot{T}^2}{(r+2a_0\,\mathrm{sh}\,\chi)(r-2a_0\,\mathrm{sh}^3\chi)},\quad e^{\lambda}=\frac{r}{r-2a_0\,\mathrm{sh}^3\chi},$$

$$r=\mathrm{th}\,\chi T-2a_0\,\mathrm{sh}\,\chi.$$

Тогда

$$\frac{u}{c}=\mathrm{th}\,\chi\sqrt{1+\frac{2a_0\,\mathrm{sh}\,\chi}{r}} \tag{17}$$

и

$$\frac{\partial(re^{-\lambda})}{\partial\chi}\,\frac{1}{\partial r/\partial\chi}=\frac{\left[\left(\frac{T}{\mathrm{ch}^2\chi}-2a_0\,\mathrm{ch}\,\chi\right)-2a_0\,\mathrm{sh}^2\chi\,\mathrm{ch}\,\chi\right]}{\left(\frac{T}{\mathrm{ch}^2\chi}-2a_0\,\mathrm{ch}\,\chi\right)}.$$

Откуда и

$$\varkappa\varepsilon = 6a_0\left(\frac{\operatorname{sh}\chi}{r}\right)^3. \tag{18}$$

При $p = \varepsilon/3$ из (6) имеем

$$e^{\nu} = e^{\lambda} = \frac{r^2}{r^2 - a_0^2 \operatorname{sh}^4\chi}, \quad r = \operatorname{th}\chi\,(c^2t^2 + 2act - a_0^2\operatorname{sh}^2\chi)^{1/2},$$

откуда

$$\frac{u}{c} = \frac{\operatorname{th}^2\chi}{r}(ct + a_0) \tag{19}$$

и

$$\frac{\partial(re^{-\lambda})}{\partial\chi}\,\frac{1}{\partial r/\partial\chi} = \frac{[(r^4 - a_0^4\operatorname{sh}^8\chi) - 4a_0^2r^2\operatorname{sh}^4\chi\operatorname{ch}^2\chi}{r^2(r^2 - a_0^2\operatorname{sh}^4\chi)}.$$

Произведя элементарные преобразования в уравнении (8), запишем

$$\varkappa\varepsilon = 3a_0^2\left(\frac{\operatorname{sh}\chi}{r}\right)^4. \tag{20}$$

Из «Теории поля» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица известно, что при $r_{\max} = r_0$

$$M_{\max} = M_0 = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^{r_0} T_0^0 r^2 dr.$$

Следовательно, максимальная энергия E_0 движущейся частицы в поле центрально-симметричной системы отсчета будет равна

$$E_0 = M_0c^2 = 4\pi\int_0^{r_0} T_0^0 r^2 dr.$$

Как известно [3],

$$\varkappa T_0^0 r^2 = [1 - e^{-\lambda}(1 - \lambda' r)] = 1 - \frac{\partial}{\partial r}(re^{-\lambda}).$$

При этом

$$E_0 = \frac{4\pi}{\varkappa} r_0(1 - e^{-\lambda_0}), \tag{21}$$

где $\lambda_0 = \lambda_{r=r_0}$.

Итак, равенство (21) является общей формулой для вычисления максимальной энергии движущейся частицы в поле при $A = \sin\chi$; χ; $\operatorname{sh}\chi$.

Вычисление показало, что для всех случаев ($A = \sin\chi$; χ; $\operatorname{sh}\chi$ и $p = 0$, $p = \varepsilon/3$) $e^{-\lambda_0} = 0$. При этом предполагается $u/c = 1$. Таким образом, максимальная энергия движущейся частицы будет равна

$$E_0 = M_0c^2 = \frac{4\pi}{\varkappa} r_0. \tag{22}$$

Из соотношения (22) следует, что $\frac{2GM_0}{r_0c^2} = 1$, где M_0 — полная масса метагалактики для закрытых моделей, а r_0 — ее гравитационный радиус. В случае открытых моделей M_0 есть масса, заключенная в объеме с радиусом r_0.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. К. П. Станюковичу за проявленный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П., Шаршекеев О. «Астрономический журнал», 1970.
2. Станюкович К. П. ДАН, **182**, № 2, 1968.

Поступила в редакцию
25.2 1969 г.

Кафедра
квантовой статистики