Вестник МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1970

УДК 539.12.01

А. Д. СМИРНОВ

К СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА

Исследуется симметрия свободного уравнения Дирака. Показывается, что оно кроме известной симметрии обладает дополнительной скрытой $O(3)$ симметрией. Найдены соответствующие генераторы.

В последнее время так называемые скрытые или динамические симметрии дифференциальных уравнений физики стали привлекать большое внимание. В частности, в [1] исследовалась скрытая симметрия уравнения Шредингера с потенциалом. Были найдены потенциалы, допускающие динамические симметрии, и явный вид соответствующих операторов, коммутирующих с гамильтонианом.

В [2, 3] рассматривается симметрия уравнения Дирака. В [2] найдены операторы симметрии уравнения Дирака для частицы в электромагнитном поле, являющиеся дифференциальными операторами первого порядка. Установлены условия для напряженностей электромагнитного поля, при которых уравнение Дирака допускает операторы симметрии. В [3] найдены операторы симметрии свободного уравнения Дирака, образующие алгебру группы $SL(2, c) \otimes SU(2)$. Результаты обобщены на случай кулоновского поля. Развитию общих методов отыскания операторов скрытых симметрий посвящены работы [4, 5, 6].

В настоящей работе рассматривается стационарное уравнение Дирака для свободной частицы. Операторы симметрии ищутся в виде дифференциального оператора второго порядка. Найдено общее решение системы определяющих уравнений. Показано, что все операторы симметрии второго порядка могут быть представлены в виде

$$Z^{(\mu)} = \sum_{i,j} a_{ij}^{(\mu)} Z_i Z_j + \sum_i b_i^{(\mu)} Z_i + c^{(\mu)},$$

где Z_i — совокупность всех операторов симметрии первого порядка, a, b, c — производные комплексные числа.

Кроме известных операторов симметрии первого порядка найдены новые операторы, образующие алгебру группы $O(3)$.

Возьмем свободное стационарное уравнение Дирака в виде

$$(H_D - E)\psi = 0, \tag{1}$$

где

$$H_D = -i\alpha_n y_n + m\rho_3, \quad y_n \equiv \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad n = 1, 2, 3.$$

Операторы группы симметрии уравнения (1) $Z^{(\mu)}$ должны удовлетворять условию

$$[Z^{(\mu)},\ H_D - E] = [Z^{(\mu)},\ H_D] = 0 \tag{2}$$

(где $[A, B] = AB - BA$) и образовывать замкнутую алгебру Ли:

$$[Z^{(\mu)},\ Z^{(\nu)}] = c_\rho^{\mu\nu} Z^{(\rho)}, \tag{3}$$

где $c_\rho^{\mu\nu} = -c_\rho^{\nu\mu}$ — структурные константы алгебры Ли. Операторы $Z^{(\mu)}$ будем искать в виде полинома второй степени по оператору $y_n = \frac{\partial}{\partial x^n}$

$$Z = \varkappa^{(0)} + \varkappa^{(m)} y_m + \varkappa^{(mn)} y_m y_n, \tag{4}$$

$\varkappa^{(0)}$, $\varkappa^{(m)}$, $\varkappa^{(mn)}$ — четырехрядные матрицы, матричные элементы которых являются функциями от $\vec{r}$.

Условие (2) дает следующую систему определяющих $Z^{(\mu)}$ уравнений:

$$\begin{gathered}
[\varkappa^{(ij)},\ \alpha_k] + [\varkappa^{(jk)},\ \alpha_i] + [\varkappa^{(ki)},\ \alpha_j] = 0, \\
-\frac{i}{2}\{[\varkappa^{(i)},\ \alpha_j] + [\varkappa^{(j)},\ \alpha_i]\} + i\alpha_n \frac{\partial \varkappa^{(ij)}}{\partial x^n} + m[\varkappa^{(ij)},\ \rho_3] = 0, \\
-i[\varkappa^{(0)},\ \alpha_i] + i\alpha_n \frac{\partial \varkappa^{(i)}}{\partial x^n} + m]\varkappa^{(i)},\ \rho_3] = 0, \\
i\alpha_n \frac{\partial \varkappa^{(0)}}{\partial x^n} + m[\varkappa^{(0)},\ \rho_3] = 0, \\
i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3.
\end{gathered} \tag{5}$$

Для нахождения матриц $\varkappa^{(i)}$ их удобно представить в виде разложения по 16-ти линейно-независимым матрицам Дирака

$$\varkappa^{(i)} = \varphi^{(i)} + f_m^{(i)}\rho_m + g_m^{(i)}\alpha_m + h_{mn}^{(i)}\rho_m\alpha_n,$$

где ρ_m, α_n — известные матрицы Дирака, $\varphi^{(i)}$, $f_m^{(i)}$, $g_m^{(i)}$, $h_{mn}^{(i)}$ — искомые функции от $\vec{r}$.

Каждое из уравнений (5) дает 16 уравнений для функций φ, g, f, h. Нами найдено общее решение указанной системы уравнений. При этом кроме известных операторов первого порядка по импульсу:

$$\begin{aligned}
&\text{гамильтониана } H_D, \\
&\text{импульса } \vec{p}, \\
&\text{спиральности } (\vec{\sigma}\vec{p}), \\
&\text{оператора Дирака } K = \rho_3(1 + \sigma_m L_m), \\
&\text{момента импульса } \vec{J}
\end{aligned} \tag{6}$$

и оператора обобщенного спина

$$\vec{S}^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{p}}{|p|^2} \pm \rho_3 \frac{[\vec{\sigma}\times\vec{p}]}{|p|}\right\}$$

найдены следующие новые операторы симметрии, являющиеся линейно-независимыми от операторов (6):

$$\vec{A} = \rho_1 \vec{p} + m\rho_3 \vec{\sigma} \qquad (7), \qquad \vec{B} = -\rho_2 [\vec{\sigma} \cdot \vec{p}] - m\sigma. \qquad (8)$$

При этом $\vec{A}H_D^s = -\vec{D} - m\vec{B}$, где $\vec{D} = -(\vec{\sigma}\vec{p})\vec{p}$ и на решениях уравнения (1) операторы $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$ являются линейно-зависимыми.

Все другие операторы вида (4), удовлетворяющие условию (2), выражаются через операторы первого порядка (6), (7), (8), а именно являются их попарными произведениями.

Операторы A_i и B_i удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[A_i, A_j] = -2im\varepsilon_{ijk}B_k,\\
&[B_i, B_j] = -2im\varepsilon_{ijk}B_k - 2i\varepsilon_{ijk}D_k,\\
&[D_i, D_j] = 0,\\
&[A_i, B_j] = 2iC_j p_i - 2im\varepsilon_{ijk}A_k,\\
&[C_i, C_j] = -2i\varepsilon_{ijk}D_k,\\
&[A_i, C_j] = -2iB_j p_i - \delta_{ij}2im(\vec{\sigma}\vec{p}),\\
&[A_i, D_j] = -2iC_i p_j,\\
&[B_i, C_j] = -2iA_j p_i + \delta_{ij}\{2i\rho_1 |p|^2 + 2im\rho_3(\vec{\sigma}\vec{\rho})\}.\\
&[B_i, D_j] = 2i\rho_2 |p|^2 \sigma_i p_j - 2i\rho_2 (\vec{\sigma}\vec{p}) p_i p_j - 2im\varepsilon_{imn}\sigma_m p_n p_j,\\
&[C_i, D_j) = -2i\rho_3 (\vec{\sigma}\vec{p}) p_i p_j + 2i\rho_3 |p|^2 \sigma_i p_j,
\end{aligned} \qquad (9)$$

где $C_i = -\rho_3\varepsilon_{imn}\sigma_m p_n$.

Как следует из (9), операторы A_i, B_i, C_i, D_i в приведенном виде не образуют замкнутой алгебры. Однако, как легко проверить, их линейная комбинация

$$Z_i^{(\pm)} = i(bB_i + cC_i + dD_i), \qquad (10)$$

где $c = \pm \frac{i}{2|p|}\sqrt{1 + 4b^2(|p|^2 + m^2)}$, $d = \frac{i - 2mb}{2|p|^2}$, b — произвольный параметр, образует алгебру группы $O(3)$:

$$[Z_i^{(\pm)}, Z_j^{(\pm)}] = i\varepsilon_{ijk}Z_k^{(\pm)}. \qquad (11)$$

Кроме (11) имеют место еще соотношения

$$[J_i, Z_j^{(\pm)}] = i\varepsilon_{ijk}Z_k^{(\pm)}, \qquad (12)$$

где $\vec{J}$ — оператор полного момента импульса.

Из (11) и (12) следует, что операторы $Z_i^{(\pm)}$ и $Q_i^{(\pm)} = J_i - Z_i^{(\pm)}$ образуют алгебру группы O(4):

$$\begin{aligned}
&[Q_i^{(\pm)}, Q_j^{(\pm)}] = i\varepsilon_{ijk}Q_k^{(\pm)},\\
&[Z_i^{(\pm)}, Z_j^{(\pm)}] = i\varepsilon_{ijk}Z_k^{(\pm)},\\
&[Q_i^{(\pm)}, Q_j^{(\pm)}] = 0.
\end{aligned} \qquad (13)$$

Операторы Казимира этой группы имеют вид

$$C_{1,2} = (\overrightarrow{Z^{(\pm)}})^2 \pm (\overrightarrow{Q^{(\pm)}})^2. \tag{14}$$

Вычисления дают

$$(\overrightarrow{Z^{(\pm)}})^2 = Z(Z+1) = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, на решениях уравнения Дирака для свободной частицы реализуются только те представления группы $O(4)$, которые характеризуются парой чисел $Z = \frac{1}{2}$ и q, где $q(q+1)$ — собственное значение оператора $(\overrightarrow{Q^{(\pm)}})^2$. В качестве базиса данного представления можно выбрать собственные функции взаимно коммутирующих операторов:

$$H_D,\ (\overrightarrow{Q^{(\pm)}})^2,\ Q_3^{(\pm)},\ Z_3^{(\pm)}.$$

При некоторых фиксированных значениях параметра b из (10) получаем, в частности, следующие наборы операторов.

При $b = 0$:

$$Z_i^{(\pm)} = S_i^{(\pm)} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{D_i}{|p|^2} \pm \frac{C_i}{|p|}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})\,\vec{p}}{|p|^2} \pm \rho_3 \frac{\varepsilon_{imn}\sigma_m p_n}{|p|}\right\}. \tag{15}$$

((15) совпадает с известным обобщением оператора спина [7]).

При $C = 0$ получаем эрмитов оператор:

$$Z_i^{(\pm)} = M_i^{(\pm)} = \frac{1}{2H_D}\left\{\pm B_i - \frac{H_D \pm m}{|p|^2} D_i\right\} =$$

$$= \frac{1}{2H_D}\left\{\mp(\rho_2\varepsilon_{imn}\sigma_m p_n + m\sigma_i) + (H_D \pm m)\frac{(\vec{\sigma}\vec{p})\,p_i}{|p|^2}\right\}. \tag{16}$$

При $d = 0$ получаем неэрмитов оператор:

$$Z_i^{(\pm)} = N^{(\mp)} = -\frac{1}{2m}(B_i \mp iC_i) = \frac{1}{2m}\{(\rho_2 \pm i\rho_3)\,\varepsilon_{imn}\sigma_m p_n + m\sigma_i\}. \tag{17}$$

В случае уравнения Дирака с потенциалом общее решение аналогичной задачи, по-видимому, не исчерпывается операторами, являющимися попарными произведениями операторов первого порядка, как это оказалось в случае свободного линейного уравнения Дирака.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность Д. Ф. Курдгелаидзе за постоянное внимание к моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винтерниц П., Смородинский Я. А., Углирдж М., Фриш И. «Ядерная физика», 4, вып. 3, 1966.
2. Шаповалов Б. Н. «Изв. вузов», физика, 4, 1968.
3. Малкин И. А., Манько В. И. Письма в ЖЭТФ, 7, вып. 3.
4. Курдгелаидзе Д. Ф. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 1966.
5. Хухунашвили З. В. «Изв. вузов», физика, 11, 1968.
6. Курдгелаидзе Д. Ф., Хухунашвили З. В. «Изв. вузов», физика, 10, 1968.
7. Соколов А. А., Лоскутов Ю. М., Тернов И. М. Квантовая механика. М., «Просвещение», 1965.

Поступила в редакцию
25. 12. 1969 г.

Кафедра
теоретической физики