Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 6 — 1970

В. И. ПАВЛОВ

# О КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

В статье приведено решение задачи о капиллярных волнах конечной амплитуды, показывающее, что при конечных амплитудах дисперсионное соотношение, полученное в линейной теории, становится непригодным.

Имеется ряд теоретических работ, описывающих поведение поверхностных волн конечной амплитуды [1—3]. В последнее время появились также и экспериментальные работы по таким волнам [4, 5].

В работе [2] было получено точное решение для стационарной капиллярной волны конечной амплитуды и найдено выражение для скорости такой волны в заивисимости от амплитуды и частоты.

В настоящей работе, в отличие от [2], определяется скорость капиллярной волны конечной амплитуды во втором приближении методом Некрасова [1]. Результаты настоящей работы и [2] с точностью до членов второго порядка малости совпадают.

Предположим, что жидкость несжимаемая, невязкая и движение ее потенциально. Предположим также, что по поверхности жидкости движется плоская волна постоянной формы со скоростью $c_0=\omega/k$. Считаем, что фазовая скорость $c_0$ зависит только от длины волны и от амплитуды. Это предположение позволяет перейти в систему координат, движущуюся относительно лабораторной с фазовой скоростью $c_0$ в направлении распространения волны. В этом случае движение будет установившимся. Исходным уравнением является уравнение Бернулли

$$\frac{P}{\rho_0}+\frac{1}{2}V^2=B. \qquad (1)$$

Здесь $V$ — скорость частицы, $P$ — давление, обусловленное поверхностным натяжением, $\rho_0$ — плотность жидкости. В силу потенциальности движения постоянная, стоящая в правой части (1), одна и та же для всего пространства, заполненного жидкостью. Поэтому она имеет значение $B=c_0^2/2$. Поскольку задача плоская, ось $ox$ направлена вдоль поверхности жидкости, ось $oy$ — перпендикулярна ей и направлена в глубь жидкости, которая заполняет таким образом положительное полупространство. Для частицы жидкости [6], находящейся вблизи поверхности, справедливо соотношение $p=\mu\varkappa$. Здесь $\varkappa$ — кривизна поверхности, $\mu$ — коэффициент поверхностного натяжения.

Для плоской задачи, если поверхности описываются параметрическими уравнениями $x=x(\zeta)$ и и $y=y(\zeta)$, кривизна определяется выражением

$$\varkappa=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial\eta^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial\eta^2}\end{vmatrix}}{\left\{\left(\dfrac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2\right\}^{3/2}},$$

Уравнение (1) тогда принимает вид

$$-\frac{1}{2}c_0^2+\frac{1}{2}V^2+\frac{\mu}{\rho_0}\frac{\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}=0. \tag{2}$$

Предположим, что волна симметрична относительно вертикальной оси, проходящей через ее гребень. Длина волны есть расстояние, например, между двумя последовательными впадинами. Поместим начало координат на гребень волны. В силу предположений, указанных выше, на комплексной плоскости $z=x+iy$ можно определить комплексный потенциал скоростей. Так как условия Коши — Римана выполняются, скорость частицы жидкости дается соотношением

$$\frac{d\psi}{dz}=-V_x+iV_y.$$

Введем вспомогательное переменное $\Lambda=\Lambda_1+i\Lambda_2$ и отобразим область одной волны на плоскости $z=x+iy$ на внутреннюю часть единичного круга $\Lambda=\Lambda_1+i\Lambda_2$ с разрезом вдоль некоторого радиуса. Это может быть достигнуто с помощью преобразования

$$\frac{dz}{d\Lambda}=-\frac{i}{k}\,\frac{\sigma(\Lambda)}{\Lambda}.$$

Функция $\sigma(\Lambda)$ — некоторая голоморфная внутри круга функция. Если бы на круг $(\Lambda)$ отображалась не область $(z)$, ограниченная поверхностью волны, а вся полуполоса, то преобразование проводилось бы с помощью функции

$$\frac{dz}{d\Lambda}=-\frac{i}{k}\,\frac{1}{\Lambda}. \tag{3}$$

Отобразим также области возможных значений потенциала скоростей $\psi(z)$ на круг $\Lambda$ с помощью отображающей функции

$$\frac{d\psi}{dz}=-\frac{i}{k}c_0\frac{1}{\Lambda}. \tag{4}$$

Из соотношения (3), (4) следует

$$\frac{d\psi}{dz}=-V_x+iV_y=\frac{c_0}{\sigma(\Lambda)}.$$

Так как при $\Lambda\to 0$, $V_x\to -c_0 V_y\to 0$, то $\sigma(0)=1$. Каждой точке окружности, ограничивающей вспомогательный круг $(\Lambda)$, соответствует точка профиля волны.

Пусть

$$\sigma(\Lambda)|_\Gamma = \sigma(e^{i\eta}) = \exp\{-is(\eta)\}.$$

Здесь

$$s(\eta) = -\Phi(\eta) + i\ln R(\eta).$$

Физический смысл функций $R(\eta)$, $\Phi(\eta)$ легко выяснить. Функция $R(\eta)$ обратно пропорциональна модулю скорости частицы жидкости на поверхности; $\Phi(\eta)$ имеет смысл угла наклона вектора скорости частицы жидкости к горизонтали. На основании вышеизложенного преобразуем уравнение Бернулли (2).

Если учесть, что $\ln R \equiv Im s(\eta)$, $-\Phi(\eta) \equiv Re s(\eta)$, $s \equiv \frac{1}{\epsilon}\tilde{z}$, $\epsilon = \frac{\mu}{\rho_0}\frac{k}{c_0^2}$, то уравнение (2) легко привести к виду

$$Im\tilde{z}(\eta) = -\epsilon\ \mathrm{arsh}\left\{\frac{d}{d\eta}Re\tilde{z}(\eta)\right\}. \tag{5}$$

Воспользуемся теоремой, впервые доказанной в работе [7]. Она заключается в следующем: на круге радиуса 1 между значениями $Re\tilde{z}(\eta)$ и $Im\tilde{z}(\eta)$ всякой голоморфной функции комплексного переменного в случае выполнения условия $Im\tilde{z}(\eta) = Im\tilde{z}(\pi-\eta)$ существует соотношение

$$Re\tilde{z}(\eta) = \int_0^{2\pi}\left[\frac{d}{d\xi}Im\tilde{z}(\varepsilon)\right]K(\eta, \xi)\,d\xi, \tag{6}$$

где

$$K(\eta, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi_j(\xi)\varphi_j(\eta)}{j}, \quad \varphi_j(\theta) = \frac{\sin_j\theta}{\sqrt{\pi}}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

Подставляя в (6) выражение (5) и приняв $Re\tilde{z}(\eta) = -\tilde{\Phi}(\eta)$, получаем нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с симметричным ядром

$$\tilde{\Phi}(\eta) = -\epsilon\int_0^{2\pi}\left\{\frac{d}{d\xi}\ \mathrm{arsh}\left(\frac{d}{d\xi}\tilde{\Phi}(\xi)\right)\right\}K(\eta, \xi)\,d\xi. \tag{7}$$

Предполагается, что решение этого уравнения существует. Поскольку, согласно теории нелинейных интегральных уравнений, интересующее нас собственное значение $\epsilon$ уравнения (7) не равно точно единице, а отличается от нее на малую величину, то

$$\epsilon = 1 + \delta^2 \tag{8}$$

и решение уравнения ищем в виде

$$\tilde{\Phi}(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty}\delta^j\Phi_j(\alpha). \tag{9}$$

Здесь $\delta$ — малый параметр.

Подставляя (8) и (9) в (7) и приравнивая члены при одинаковых степенях $\delta$ в левой и правой частях уравнения (7), получим бесконечную систему интегральных уравнений для функций $\Phi_j(\eta)$, которую можно решать последовательно. Из решения этих уравнений попутно выясняется смысл параметра $\delta$: это величина, пропорциональная $ky_0$. С учетом всего вышесказанного и условия (8) запишем

$$c_0^2 \simeq \mu k - \frac{1}{8} \mu k (ky_0)^2. \tag{10}$$

Полученное выражение для квадрата фазовой скорости волны находится в соответствии с формулой, полученной Креппером в работе [2]. Действительно, эта зависимость имеет вид

$$c_0^2 = \mu k \left[1 + \frac{1}{4} (ky_0)^2\right]^{-1/2}. \tag{11}$$

Если считать, что $ky_0 \ll 1$, то, разложив соотношение (11) в ряд, получаем выражение (10).

Формула (10) находится в соответствии с результатом, полученным в работе [3], если пренебречь влиянием гравитационных сил.

В заключение выражаю глубокую благодарность В. А. Красильникову и Л. К. Зарембо за ценные советы и помощь в работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов А. И. Собр. соч., т. 1, статья 19. М., Изд-во АН СССР, 1961.
2. Grapper G. D. Journal of Fluid Mechanics, **2**, 532, 1957.
3. Секерж-Зенькович Я. И. ДАН СССР, **109**, 913, 1956.
4. Зарембо Л. К., Красильников В. А., Тхай Тхань Лонг. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 132, 1969.
5. Зарембо Л. К., Красильников В. А., Тхай Тхань Лонг. «Вестн. Моск. ун-та», физ. астрон., № 6, 121, 1969.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
7. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М.—Л., Гостехиздат, 1911.

Поступила в редакцию
14. 1. 1970 г.

Кафедра
акустики