ВЕСТНИК
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1970

УДК 539.293:538.3

В. Л. БОНЧ-БРУЕВИЧ, Я. Г. ПРОЙКОВА

БЕСПОЛЕВОЙ НАГРЕВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Развита теория «бесполевого нагрева» в магнитном поле при произвольном механизме рассеяния импульса. Рассеяние энергии носителей считается обусловленным взаимодействием их с акустическими фононами. Сформулирован вариационный принцип, позволяющий находить достаточный критерий флуктуационной неустойчивости без явного решения кинетического уравнения. Явно получен такой критерий для случая магнитного поля, перпендикулярного градиенту функции распределения.

В работах [1 и 2] была показана возможность «бесполевого» нагрева носителей заряда в полупроводниках в условиях, когда термодинамическое равновесие нарушено за счет искусственно поддерживаемого градиента функции распределения.

В данной работе обобщается расчет [2] на случай пространственно неоднородной системы в поперечном магнитном поле. Мы изложим также вариационный метод исследования флуктуационной устойчивости системы, по-видимому, удобный для приложений.

Будем рассматривать ту же простейшую модель, что и в цитированных работах, полагая $w_p = \vec{p}^2/2m$, где w и $\vec{p}$ — энергия и квазиимпульс электрона. Будем также использовать аппроксимацию малой неупругости.

Основные уравнения

Напишем кинетическое уравнение для функции распределения $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ при наличии электрического и магнитного полей и градиента концентрации.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla f) + e(\vec{E}, \nabla_{\vec{p}} f) - \frac{e}{mc}(\vec{B}, [\vec{p}, \nabla_{\vec{p}} f]) = I[f]. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{v}$ — групповая скорость электрона, $I[f]$ — интеграл столкновений. Следует заметить, что фактически в интересующих нас условиях биполярного возбуждения надо рассматривать два кинетических уравнения — для электронов проводимости и для дырок. Однако в принятых ниже аппроксимациях эти уравнения оказываются независимыми; соответственно достаточно явно выписать лишь одно из них.

Как обычно [3], представим функцию распределения в виде

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = f_s(\vec{r}, p, t) + \frac{(\vec{p}, \vec{f}_1)}{p}, \quad |\vec{f}_1| \ll f_s. \qquad (2)$$

Для симметричной и антисимметричной частей функции распределения получим уравнения

$$\frac{\partial f_s}{\partial t}+\frac{v}{3}\, div \vec{f}_1+\frac{1}{3p^2}\frac{\partial}{\partial p}(p^2 e\vec{E}\vec{f}_1)=I[f_s], \tag{3}$$

$$\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial t}+v\nabla f_s+e\vec{E}\frac{\partial f_s}{\partial p}+\frac{e}{mc}[\vec{B}\vec{f}_1]=-\frac{\vec{f}_1}{\tau}, \tag{4}$$

где τ — время релаксации импульса.

В силу (4):

$$\vec{f}_1(\vec{r},p,t)=\vec{C}_1(\vec{r},p)\sin(\omega t+\varphi)e^{-t/\tau}+\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t e^{-(t-t')/\tau}\sin\omega(t-t')\,dt'\times$$

$$\times\left\{-v\nabla\frac{\partial f_s}{\partial t'}-e\vec{E}\frac{\partial^2 f_s}{\partial p\,\partial t'}-\frac{v}{\tau}\nabla f_s-\frac{e}{\tau}\vec{E}\frac{\partial f_s}{\partial p}+\frac{\omega v}{B}[B,\nabla f_s]+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega e}{B}[\vec{B},\vec{E}]\frac{\partial f_s}{\partial p}\right\}-\frac{\omega\vec{B}}{B^2}\int\limits_0^t dt'\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)\sin\omega(t-t')\times$$

$$\times\int\limits_0^{t'} dt''\exp\left(-\frac{t'-t''}{\tau}\right)\left\{v(\vec{B},\nabla f_s)+e(\vec{B},\vec{E})\frac{\partial f_s}{\partial p}\right\}. \tag{5}$$

Здесь $\vec{C}_1(\vec{r},p)\equiv\vec{f}_1(\vec{r},p,t=0)$, $\omega=\dfrac{eB}{mc}$ — циклотронная частота, φ — постоянная.

Интересуясь бесполевым нагревом, можем считать электрическое поле E ($E_x=E_z=0$; $E_y=E$) слабым, пренебрегая его влиянием на функцию $f_s(\vec{r},p,t)$, но учитывая его в выражении (5) и в формуле для плотности потока:

$$\vec{j}=\frac{4\pi}{3m}\int\limits_0^\infty \vec{f}_1 p^3\,dp. \tag{6}$$

Согласно [2], эта аппроксимация может быть оправдана в условиях квазинейтральности; в частности, длина свободного пробега по энергии должна значительно превышать дебаевскую длину. Далее [1], должно иметь место неравенство $e\vec{E}L/\tilde{w}\ll 1$, где L — длина образца и $L,\ b\gg d$ (b и d — ширина и толщина образца), а $\tilde{w}$ — средняя энергия частицы. Предположим еще, что собственное магнитное поле мало по сравнению с приложенным постоянным магнитным полем, $B=B_z$ ($B_x=B_y=0$). Тогда уравнение для функции $f_s(\vec{r},p,t)$ примет вид

$$\frac{\partial f_s}{\partial t}+\frac{v}{3}\tilde{F}\sin(\omega t+\varphi)e^{-t/\tau}-$$

$$-\frac{v^2}{3\omega}\int\limits_0^t dt'\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)\sin\omega(t-t')\left\{\nabla^2\frac{\partial f_s}{\partial t'}+\frac{1}{\tau}\nabla^2 f_s\right\}-$$

$$-\frac{v^2\omega}{3}\int\limits_0^t dt'\exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right)\sin\omega(t-t')\int\limits_0^{t'} dt''\exp\left(-\frac{t'-t''}{\tau}\right)\frac{\partial^2 f_s}{\partial z^2}=I[f_s]. \tag{7}$$

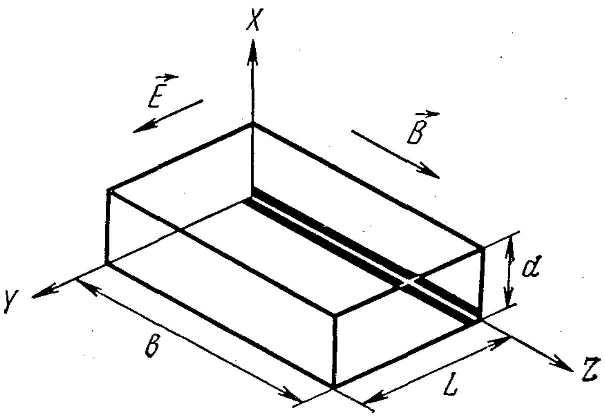
Здесь $\tilde{F}=div\,\vec{C}_1(\vec{r},p)$.

Стационарная задача

Уравнение для стационарной задачи получается из (7) при f_s, не зависящей от времени, и $t \to \infty$. Учитывая, что f_s зависит только от $|\vec{p}|$, введем новую переменную $w = p^2/2m$. Тогда искомое уравнение будет

$$\nabla^2 f_s(\vec{r}, w) + \omega^2\tau^2 \frac{\partial^2 f_s}{\partial z^2} = -\frac{3(1+\omega^2\tau^2)}{v^2\tau} I[f_s]. \tag{8}$$

Рассмотрим плоский образец (см. рисунок). Свет создает неравновесные носители за счет междузонных переходов (освещается узкий (зачерненный на чертеже) слой образца вблизи одного из контактов). Магнитное поле создает неоднородное распределение носителей в направлении оси Ox. Ток имеет компоненты



$$j_x = -\frac{8\pi\sqrt{2m}}{3}\int_0^\infty dw \frac{\tau w^{3/2}}{1+\omega^2\tau^2}\left\{\omega\tau\frac{\partial f_s}{\partial y} + \frac{\partial f_s}{\partial x} - eE\omega\sqrt{\frac{m}{2w}}\frac{\partial f_s}{\partial w}\right\},$$

$$j_y = -\frac{8\pi\sqrt{2m}}{3}\int_0^\infty dw \frac{\tau w^{3/2}}{1+\omega^2\tau^2}\left\{\frac{\partial f_s}{\partial y} - \omega\tau\frac{\partial f_s}{\partial x} - \frac{eE}{\tau}\sqrt{\frac{m}{2w}}\frac{\partial f_s}{\partial w}\right\}, \tag{9}$$

$$j_z = -\frac{8\pi\sqrt{2m}}{3}\int_0^\infty dw\, \tau w^{3/2}\frac{\partial f_s}{\partial z}.$$

Как видим, компоненты тока по осям x и y зависят от напряженности магнитного и электрического полей, а ток по оси z определяется только градиентом функции распределения. Для дальнейшего особый интерес представит компонент j_x. Будем считать, что $L, b \gg d$. При этом функцию распределения можно считать зависящей только от переменных w и x[1].

Граничные условия к (8) при $f_s = f_s(x, w)$ получаются как и в (2), из условия непрерывности потока частиц на контактах:

$$\left.\frac{\partial f_s}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{3m}{2}\cdot\frac{1+\omega^2\tau^2}{w\tau}\{g(w) - s_1(w) f_s(w, 0)\}, \tag{10а}$$

$$\left.\frac{\partial f_s}{\partial x}\right|_{x=d} = -\frac{3m}{2}\cdot\frac{1+\omega^2\tau^2}{w\tau} s_2(w) f_s(d, w). \tag{10б}$$

Здесь функция $g(w)$ дает скорость генерации, а $s_1(w)$, $s_2(w)$ суть аналоги скорости поверхностной рекомбинации.

Решение уравнения (8) можно представить в виде

$$f_s(x, w) = \sum_\lambda a_\lambda \varphi_\lambda(x) f_\lambda(w). \tag{11}$$

[1] Учет возможной зависимости функции распределения от всех трех координат не дает чего-либо принципиально нового.

Здесь функции $\varphi_\lambda(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2\varphi_\lambda}{dx^2} = \lambda\varphi_\lambda, \tag{12}$$

а $f_\lambda(w)$ суть собственные функции интеграла столкновений, определяемые равенством

$$I[f_\lambda(w)] = -\frac{2w\tau}{3m} \cdot \frac{\lambda}{1+\omega^2\tau^2} f_\lambda(w). \tag{13}$$

При $\omega = 0$ задача сводится к уже рассмотренной в работе [2]. Таким образом, параметр разделения $\lambda \in Re$ и $\lambda \geqslant 0$. При $\lambda = 0$ мы имеем $I[f_0] = 0$, что соответствует равновесию ($f_0 = \mathrm{const}\, e^{-w/T_0}$, T_0 — температура решетки в энергетических единицах).

Уравнение (12) при $\lambda \neq 0$ дает

$$\varphi_\lambda(x) = e^{-x\sqrt{\lambda}} + b_\lambda e^{x\sqrt{\lambda}}, \tag{14}$$

а при $\lambda = 0$

$$\varphi_0 = 1 + b_0 x. \tag{15}$$

Коэффициенты a_λ, b_λ и b_0 определяются из граничных условий (10 а и б). Функции $f_\lambda(w)$ должны быть интегрируемы в области $0 \leqslant w < \infty$ в соответствии с формулой для концентрации частиц:

$$n(x) = \frac{\sqrt{2m^3}}{\pi^2\hbar^3} \sum_\lambda a_\lambda\varphi_\lambda(x) \int_0^\infty w^{1/2} f_\lambda(w)\, dw. \tag{16}$$

В силу (13) они удовлетворяют соотношению

$$\int_0^\infty dw\rho(w) f_\lambda(w) f_{\lambda'}(w) = \delta_{\lambda\lambda'} N. \tag{17}$$

Явный вид весовой функции $\rho(w)$ зависит от конкретного выражения для интеграла столкновений. Рассмотрим, например, рассеяние частиц на акустических фононах [3], тогда

$$I[f_\lambda] = \frac{1}{w^{1/2}} \frac{d}{dw}\left[w^2\left(\frac{df_\lambda}{dw} + f_\lambda\right)\right]. \tag{18}$$

Здесь (и в дальнейшем) энергия w измеряется в единицах T_0, длина — в единицах

$$x_0 = \frac{lT_0}{3ms^2\sqrt{2}},$$

а время — в единицах $t_0 = \frac{l}{3s}\sqrt{\frac{T_0}{2ms^2}}$. Далее $\Omega = \omega t_0$, s есть скорость звука, l — длина свободного пробега. При этом

$$\rho(w) = \frac{w^{3/2}\tau e^{-w}}{1+\Omega^2\tau^2}. \tag{19}$$

Флуктуации

Обращаясь к исследованию флуктуационной устойчивости системы, рассмотрим задачу (7) со случайно заданным начальным условием.

Как и в [2], для лапласовского образа функции распределения получим выражение

$$f_p(x, w) = \sum_{\nu}\left\{a_\nu - b_\nu \frac{w^{1/2}\tau\,[(p\tau+1)\sin\varphi + \Omega\tau\cos\varphi]}{(p\tau+1)^2+\Omega^2\tau^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_\nu w\tau^2}{(p\tau+1)^2+\Omega^2\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\frac{f_\nu(x, w)}{p-\mu(p)}. \qquad (20)$$

Здесь

$$f_p(x, w) = \int_0^\infty e^{-pt} f_s(x, w, t)\,dt, \qquad (21)$$

$f_\mu(x, w)$ и $\mu(p)$ — собственные функции и собственные значения оператора

$$\hat{L}_p = \frac{w\tau(p\tau+1)}{(p\tau+1)^2+\Omega^2\tau^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{I}, \qquad (22)$$

величины a_ν, b_ν — коэффициенты в разложении $f_s(w, x, t=0)$ и $F(x, w)$ по собственным функциям оператора $\hat{L}_p$.

Выполняя обратное преобразование Лапласа:

$$f_s(x, w, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} f_p(x, w)\,dp. \qquad (23)$$

видим, что функция распределения представляется в виде суммы экспонент. Одни слагаемые в ней описывают обычное затухание $\left(\sim \exp\left(-\frac{t}{\tau} \pm i\Omega t\right)\right)$, а другие имеют вид $\exp(p_i t)$, где p_i — корни уравнения

$$p - \mu(p) = 0. \qquad (24)$$

Если корень (24) вещественный, то случай $p_i > 0$ соответствовал бы неустойчивости системы. При комплексных p_i оператор $\hat{L}_p$ становится, вообще говоря, неэрмитовым, и задача требует дополнительного исследования. Мы ограничимся случаем $p \in Re$. Таким образом, задача об устойчивости свелась к отысканию условий, при которых $\mu > 0$. Для этой цели рассмотрим уравнение для собственных значений оператора $\hat{L}_p$

$$e^{-w}\cdot\frac{w^{3/2}\tau(p\tau+1)}{(p\tau+1)^2+\Omega^2\tau^2}\frac{\partial^2\psi_\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial w}\left[w^2 e^{-w}\frac{\partial\psi_\mu}{\partial w}\right] = \mu w^{1/2} e^{-w}\psi_\mu(x, w). \qquad (25)$$

Здесь функции ψ_μ определяются равенством $f_\mu(x, w) = e^{-w}\psi_\mu(x, w)$. Граничные условия, накладываемые на f_μ — те же, что и на $f_s(x, w)$.

Уравнение (25) можно рассматривать как уравнение Эйлера, отвечающее следующей задаче на условный экстремум: найти максимум функционала

$$A[u] = -\int_0^d dx\int_0^\infty dw\left\{\frac{\tau w^{3/2}(p\tau+1)}{(p\tau+1)^2+\Omega^2\tau^2}e^{-w}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + w^2 e^{-w}\left(\frac{\partial u}{\partial w}\right)^2\right\} \qquad (26)$$

при условии

$$N \equiv \int_0^d dx\int_0^\infty dw\, w^{1/2} e^{-w} u^2 = \mathrm{const} \qquad (27)$$

и граничных условиях (10а) и (10б).

Проинтегрировав функционал $A\{u\{$ по частям, видим, что появляются два слагаемых. Одно из них равно μN, а второе определяется граничными условиями. Таким образом

$$A[\psi_\mu] = \mu N - \int_0^\infty dw \frac{\tau w^{3/2}(p\tau+1)}{(p\tau+1)^2+\Omega^2\tau^2} e^{-w}(1+\Omega^2\tau^2)\{G(w)\psi_\mu(0, w) - S_1(w)\psi_\mu^2(0, w) - S_2(w)\psi_\mu^2(d, w)\}. \quad (28)$$

Здесь введены обозначения

$$G(w) = \frac{g(w)}{w\tau} e^{+w}, \quad (29а)$$

$$S_i(w) = \frac{s_i(w)}{w\tau}, \quad i = 1, 2. \quad (29б)$$

Следовательно, при $u \neq \psi_\mu$

$$\mu N > A[u] + \int_0^\infty dw \frac{\tau w^{3/2}(p\tau+1)}{(p\tau+1)^2+\Omega^2\tau^2} e^{-w}(1+\Omega^2\tau^2)\{G(w)u(0, w) - S_1(w)u^2(0, w) - S_2(w)u^2(d, w)\}. \quad (30)$$

Таким образом, положительность правой части (30) при любой пробной функции, удовлетворяющей тем же граничным условиям, что и ψ_μ, достаточна для существования неустойчивости в системе.

Выберем пробную функцию вида [1]

$$u(x, w) = F(w) e^{-\beta(w)x}. \quad (31)$$

Функции $F(w)$ и $\beta(w)$ определяются из граничных условий и имеют вид

$$F(w) = \frac{g(w) e^{w}}{s_1 + s_2}, \quad (32)$$

$$\beta(w) = \frac{s_2}{w\tau}(1+\Omega^2\tau^2). \quad (33)$$

Подставляя (32) и (33) в правую часть (30), заменяя p на μ и полагая $\mu \to +0$, найдем критическое условие, отвечающее возникновению флуктуационной неустойчивости. Результат зависит от вида функции генерации $g(w)$. Для ориентировки будем считать, что функция $F(w)$ имеет острый максимум при некоторой энергии $w = w_0$. Тогда искомое условие легко привести к виду (см. приложение).

$$-\frac{w_0^{3/2}}{2\beta}\left\{\beta'^2 + \frac{\tau w_0^{-1/2}}{1+\Omega^2\tau^2}\beta^2\right\} + s_2 < 0. \quad (34)$$

Здесь $\beta' = \left(\frac{d\beta}{dw}\right)_{w=w_0}$, значения s_2 и τ также берутся при $w = w_0$.

Заметим, что напряженность магнитного поля входит в неравенство (34) не только явно через Ω, но и через β. Подставляя в (34) явное выражение для β (33) находим

$$\frac{w_0^{5/2}\tau}{1+\Omega^2\tau^2}\left[(1+\Omega^2\tau^2)\frac{d}{dw}\left(\frac{s_2}{w\tau}\right) + \frac{2s_2\Omega^2}{w}\frac{d\tau}{dw}\right]^2 > s_2^2. \quad (35)$$

[1] Функция такого типа (но с постоянным β) получается при решении уравнения диффузии в обычной задаче.

Смысл этого условия ясен: поверхностная рекомбинация на незатемненной грани не успевает выравнивать равновесие (по энергии и по концентрации), непрерывно нарушаемое при $x=0$. Видно также, что рекомбинация на затемненной грани не играет в данном случае существенной роли. В частности, в сильном поле ($\Omega\tau \gg 1$) неравенство (35) принимает вид

$$\frac{w_0^{5/2}}{\tau}\Omega^2\left\{\tau^2\frac{d}{dw}\left(\frac{s_2}{w\tau}\right)+\frac{2s_2}{w}\frac{d\tau}{dw}\right\}^2 > s_2^2. \tag{36}$$

В отсутствие магнитного поля мы получили бы вместо выражений (35) и (36):

$$w_0^{5/2}\tau\left[\frac{d}{dw}\left(\frac{s_2}{w\tau}\right)\right]^2 > s_2^2.$$

Таким образом, в промежуточных полях роль магнитного поля зависит от знака производной $\frac{d}{dw}\left(\frac{s_2}{w\tau}\right)$ при $w=w_0$. Сильное магнитное поле, однако всегда способствует наступлению неустойчивости.

Заметим, что неустойчивость рассматриваемого типа может быть как связана, так и не связана с непрерывным ростом числа носителей заряда в системе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Подставляя (32) в (26) и полагая $p=\mu\to+0$, находим

$$A[u] = -\int_0^\infty dw\,\frac{1-e^{-2\beta d}}{2\beta}\,e^{-w}w^2F^2\left\{\left(\frac{F'}{F}-\beta'\right)^2+\frac{\tau w^{-1/2}}{1+\Omega^2\tau^2}\beta^2\right\} \cong$$

$$\cong -\frac{1-e^{-2\beta d}}{2\beta}\,e^{-w_0}w_0^2\left\{\beta'^2+\frac{\tau\beta^2 w_0^{-1/2}}{1+\Omega^2\tau^2}\right\}\int_0^\infty F^2\,dw. \tag{37}$$

Аналогично, второе слагаемое в правой части (30) приближенно примет вид

$$\tau w_0^{3/2}e^{-w_0}\left\{\frac{G}{F}-S_1-S_2e^{-2\beta d}\right\}\int_0^\infty F^2\,dw. \tag{38}$$

При этом следует принять во внимание, что, в силу (31а) и (33)

$$\frac{G}{F}=S_1+S_2. \tag{39}$$

По предположению эта функция изменяется гораздо медленнее, чем $F(w)$. Равенства (26), (37) и (38) с учетом (39) дают (34).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бонч-Бруевич В. Л. «Физика и техника полупроводников», 3, 1010, 1969.
2. Бонч-Бруевич В. Л. Phys. Stat. Sol., 33, 911, 1969; «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 98, 1969.
3. Давыдов Б. И. ЖЭТФ, 7, 1069, 1937.

Поступила в редакцию
2. 3. 1970 г.

Кафедра
физики полупроводников