

УДК 62—50

Б. Б. БУХОВЦЕВ, О. В. КУЛАГИНА

КОРНЕВЫЕ ГОДОГРАФЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТИЧНЫМ СВОБОДНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрены особенности траекторий корней характеристических уравнений второго порядка с линейным и квадратичным свободным параметром. Указаны общие и асимптотические свойства годографов. Приведены примеры.

Исследование траекторий корней уравнений с линейным свободным параметром [1] дало возможность обнаружить общие закономерности траекторий, определяемые классом уравнения и его коэффициентами. Знание таких закономерностей обычно в большой степени облегчает построение траекторий корней. Так, для уравнений с линейным свободным параметром асимптотика траекторий корней полностью определяется классом уравнения.

В случае уравнений с квадратичным свободным параметром, очевидно, существует значительно большее многообразие видов траекторий корней. Для таких траекторий асимптотика не всегда определяется классом уравнения. В данной работе рассматриваются траектории корней уравнений второго порядка и делается попытка связать вид траекторий корней с классом уравнения и соотношениями между коэффициентами уравнения.

Характеристическое уравнение

$$\Phi_n(p) + \rho\Psi_m(p) + \rho^2\Theta_l(p) = 0 \quad (1)$$

с линейным и квадратичным свободным параметром ρ [2, 3] в зависимости от степеней n, m, l полиномов от $p = \delta + j\omega$:

$$\begin{aligned}\Phi_n(p) &= a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0, \\ \Psi_m(p) &= b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0, \\ \Theta_l(p) &= c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \dots + c_0\end{aligned}$$

назовем уравнением класса $[n, m, l]$. Коэффициенты a_ν, b_μ и c_λ заданы. Уравнение, которое получается из (1) заменой $\rho_1 = \frac{1}{\rho}$, имеет траектории корней, совпадающие с траекториями корней уравнения (1) (меняется только направление движения корней вдоль траекторий). В соответствии с этим классы $[n, m, l]$ и $[l, m, n]$ назовем взаимно зеркальными классами. Так как траектории корней взаимно зеркальных классов облада-

ют одинаковыми свойствами, из всех классов с $n \neq l$ будем рассматривать траектории корней только таких классов, для которых $n > l$.

Прежде чем перейти к систематическому рассмотрению свойств траекторий корней различных классов, сформулируем некоторые общие свойства траекторий корней уравнений вида (1) для $n \leq 2$, $m \leq 2$, $l \leq 2$. Приведем также уравнения траекторий корней и формулы параметра [2, 3].

1. На действительной оси траекториям корней принадлежат только те участки, которые удовлетворяют неравенству:

$$(b_2\delta^2 + b_1\delta + b_0)^2 - 4(a_2\delta^2 + a_1\delta + a_0)(c_2\delta^2 + c_1\delta + c_0) \geq 0. \quad (2)$$

Участки, не удовлетворяющие (2), являются запрещенными участками. Знак равенства в (2) соответствует точкам поворота.

2. В тех участках действительной оси, которые удовлетворяют (2), происходит «наложение» траекторий корней. Каждой точке соответствуют два значения параметра ρ , определяемых формулой

$$\rho_{1,2} = -\frac{b_2\delta^2 + b_1\delta + b_0}{2(c_2\delta^2 + c_1\delta + c_0)} \pm \sqrt{\frac{(b_2\delta^2 + b_1\delta + b_0)^2}{4(c_2\delta^2 + c_1\delta + c_0)^2} - \frac{a_2\delta^2 + a_1\delta + a_0}{c_2\delta^2 + c_1\delta + c_0}}.$$

3. Начальные точки ($\rho = 0$) траекторий корней определяются уравнением $a_2\rho^2 + a_1\rho + a_0 = 0$. Предельные точки ($\rho \rightarrow \infty$) — уравнением $c_2\rho^2 + c_1\rho + c_0 = 0$.

4. Уравнение комплексных ($\omega \neq 0$) ветвей траекторий корней имеет вид $A\omega^4 + B(\delta)\omega^2 + D(\delta) = 0$ (см. (12)). Формулы, определяющие связь коэффициентов A , $B(\delta)$ и $D(\delta)$ с коэффициентами уравнения (1), приведены в приложении (формулы (13) — (16)).

Значение параметра для комплексных ветвей траекторий определяется формулой

$$\rho = -\frac{(a_2c_1 - a_1c_2)(\delta^2 + \omega^2) + 2(a_2c_0 - a_0c_2)\delta + (a_1c_0 - a_0c_1)}{(b_1c_2 - b_2c_1)(\delta^2 + \omega^2) + 2(b_0c_2 - b_2c_0)\delta + (b_0c_1 - b_1c_0)}.$$

5. В двукратных точках (в том числе начальных и предельных) траектории корней образуют правильную четырехлучевую звезду.

Свойства траекторий корней уравнений второго порядка определяются свойствами кривых, описываемых уравнением вида (12).

Рассмотрим три возможных случая:

$$A = 0, B(\delta) \equiv 0;$$

$$A = 0, B(\delta) \neq 0;$$

$$A \neq 0 \text{ (из (14) и (15) следует, что } B(\delta) \neq 0; D(\delta) \neq 0).$$

Если $A = 0$, $B(\delta) \neq 0$, то траектории корней расположены на вертикальной прямой $\delta = -\frac{D_0}{D_1}$. К таким относятся траектории корней уравнений классов [2.0.0] и [0.2.0].

Если $A = 0$, $B(\delta) \neq 0$, то уравнение траекторий корней имеет вид $\omega^2 = -\frac{D(\delta)}{B(\delta)} = f(\delta)$. Траектории корней, описываемые этим уравнением, могут быть незамкнутыми и иметь асимптоты. К таким относятся траектории корней следующих классов: [1.2.0], [2.2.0] и [2.1.0].

Если $A \neq 0$, то уравнение траекторий корней можно записать в виде (см. (17)):

$$\omega^2 + \delta^2 = -\frac{B_1\delta + B_0}{2A} \pm \sqrt{\frac{(B_1\delta + B_0)^2}{4A^2} - \frac{(D_2'\delta^2 + D_1\delta + D_0)}{A}}. \quad (3)$$

Траектории корней, описываемые этим уравнением, всегда замкнуты и не имеют комплексных ветвей, уходящих в бесконечность. К таким относятся траектории классов: [2.0.1], [2.1.1], [2.2.1], [1.2.1], [2.0.2], [2.1.2], [2.2.2.]

Таким образом, перечислены все возможные виды траекторий корней уравнений второго порядка.

Перейдем к рассмотрению траекторий корней уравнений конкретных классов с учетом проведенной выше классификации.

Рассмотрим траектории корней уравнений класса [2.0.0]:

$$(a_2\rho^2 + a_1\rho + a_0) + \rho b_0 + \rho^2 c_0 = 0.$$

В зависимости от знака a_2c_0 может быть два случая.

В первом случае при $a_2c_0 < 0$ траектории корней расположены только на действительной оси. Отрезок, удовлетворяющий условию

$$-\frac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} + \frac{b_0^2}{4c_0a_2}} \leq \delta \leq -\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} + \frac{b_0^2}{4c_0a_2}}, \quad (4)$$

является запрещенным, за исключением точек

$$\delta_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} + \frac{b_0^2}{4c_0a_2}}, \quad (5)$$

которые являются точками поворота. Оба годографа (положительный и отрицательный) уходят в бесконечность по действительной оси.

Во втором случае $a_2c_0 > 0$. Траектории корней состоят из отрезка действительной оси, удовлетворяющего (4). Значение параметра ρ определяется формулой

$$\rho_{1,2} = -\frac{b_0}{2c_0} \pm \sqrt{-\frac{a_2}{c_0}\delta^2 - \frac{a_1}{c_0}\delta + \left(\frac{b_0^2}{4c_0^2} - \frac{a_0}{c_0}\right)}.$$

Если коэффициенты a_2, a_1, a_0, b_0, c_0 таковы, что подкоренное выражение в (4) отрицательно, то на действительной оси нет ни одной точки, принадлежащей траекториям корней. При любых значениях коэффициентов a_2, a_1, a_0, b_0, c_0 бесконечно удаленные участки действительной оси являются запрещенными. Точки поворота определяются из (5). В обеих точках поворота значения параметра ρ одинаковы и равны $\rho_{1,2} = -\frac{b_0}{2c_0}$.

В том случае, когда на действительной оси есть участок, принадлежащий траекториям, точка $\delta = -\frac{a_1}{2a_2}$ является кратной точкой одновременно как для положительного, так и для отрицательного годографа.

Значения свободного параметра в кратной точке

$$\rho_{1,2} = -\frac{b_0}{2c_0} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4c_0a_2} + \frac{b_0^2}{4c_0^2} - \frac{a_0}{c_0}}$$

Уравнение траекторий корней для $\omega \neq 0$ имеет вид $\delta = -\frac{a_1}{2a_2}$, т. е. комплексные ветви траекторий корней класса [2.0.0] расположены на вертикальной прямой. Отметим, что точки поворота на действительной оси, определяемые (5), расположены симметрично относительно этой вертикальной прямой. Значение параметра ρ для комплексных ветвей определяется формулой

$$\rho_{1,2} = -\frac{b_0}{2c_0} \pm \sqrt{\frac{b_0^2}{4c_0^2} + \frac{a_1^2}{4a_2c_0} - \frac{a_1}{c_0} + \frac{a_2}{c_0}\omega^2}$$

При $\omega \rightarrow \infty$ значения параметра ρ стремятся к $\pm\infty$, т. е. оба годографа (положительный и отрицательный) уходят по прямой $\delta = -\frac{a_1}{2a_2}$ в бесконечность.

Таким образом, для траекторий корней класса [2.0.0] при $a_2c_0 > 0$ асимптотой (для положительного и отрицательного годографа одновременно) является вертикальная прямая $\delta = -\frac{a_1}{2a_2}$, так же как это было для уравнений класса [2.0] с линейным параметром [1]. Отличным от уравнений с линейным параметром является то, что прямая $\delta = -\frac{a_1}{2a_2}$ является асимптотой как для положительного, так и для отрицательного годографа (двойной асимптотой). Наличие двойных асимптот вообще характерно для траекторий корней уравнений с квадратичным свободным параметром.

Рассмотрим пример.

$$(\rho^2 + 3\rho + 2) + \rho + 2\rho^2 = 0. \quad (6)$$

Корни этого характеристического уравнения при $\rho = 0$ выходят из начальных точек $\delta = -2$ и $\delta = -1$. Движение корней по действительной оси ясно из графика параметра $\rho(\delta)$, показанного на рис. 1. График $\rho(\delta)$, построенный для точек действительной оси, дает полную картину возможных аperiодических движений в системе при значениях параметра ρ , лежащих в диапазоне $-0,67 \leq \rho \leq 0,29$. Для таких значений ρ график $\rho(\delta)$ определяет два корня, симметричных относительно точки $\delta = -1,5$ (кратной точки).

Комплексные ветви траекторий корней представляют собой прямую $\delta = -1,5$. Поведение корней на этой прямой может быть наглядно представлено графиком $\omega(\rho)$, рис. 1. Периодические решения имеют место при значениях параметра ρ , удовлетворяющих условию $\rho < -0,67$ или $\rho > 0,29$, причем каждому значению ρ соответствуют два комплексно сопряженных корня уравнения (6). Траектории корней показаны на плоскости $(j\omega, \delta)$ на рис. 1. Графики $\rho(\delta)$ и $\omega(\delta)$ совместно с траекториями корней дают возможность определить все решения уравнения (6) при различных значениях параметра ρ .

Рассмотрим траектории корней уравнений класса [2.2.0].

$$(a_2\rho^2 + a_1\rho + a_0) + \rho(b_2\rho^2 + b_1\rho + b_0) + \rho^2c_0 = 0.$$

На действительной оси траекториям корней принадлежат участки, удовлетворяющие неравенству $h \geq 0$, где

$$h = b_2^2 \delta^4 + 2b_2 b_1 \delta^3 + (b_1^2 + 2b_2 b_0 - 4c_0 a_2) \delta^2 + (2b_1 b_0 - 4c_0 a_1) \delta + (b_0^2 - 4c_0 a_0).$$

При $\delta \rightarrow \pm \infty$ это неравенство выполняется, следовательно, бесконечно удаленные участки действительной оси принадлежат траекториям корней. Точки поворота определяются уравнением $h=0$. (7)

Если уравнение (7) не имеет ни одного действительного решения, то вся действительная ось принадлежит траекториям корней. Если оно имеет два действительных решения, то на действительной оси имеется запрещенный участок, заключенный между точками поворота (решениями уравнения (7)). Если (7) имеет четыре действительных решения, то имеется два запрещенных участка.

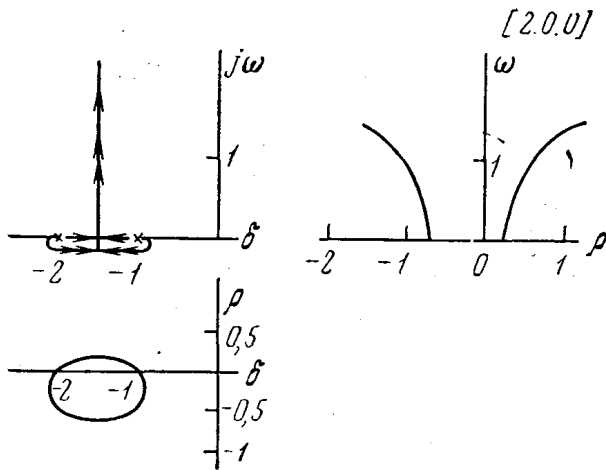
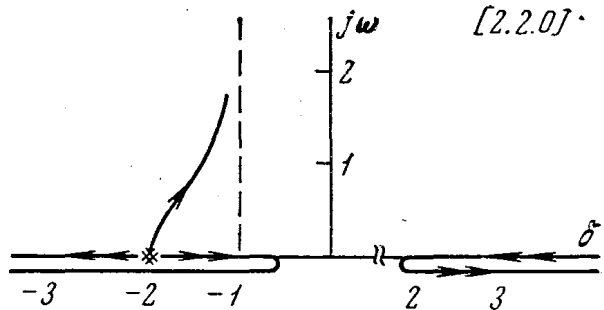


Рис. 1

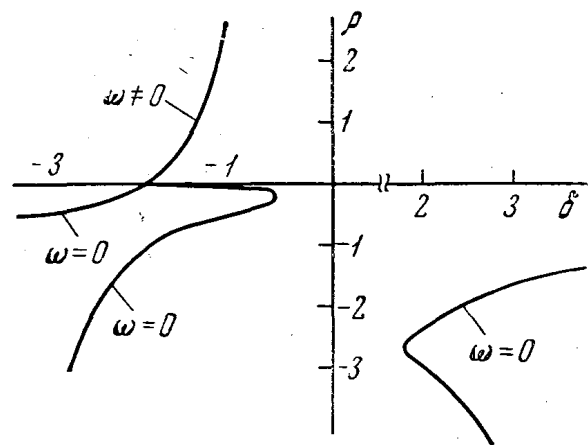


Рис. 2

Из формулы параметра для действительной оси

$$\rho_{1,2} = -\frac{(b_2 \delta^2 + b_1 \delta + b_0)}{2c_0} \pm \frac{(b_2 \delta^2 + b_1 \delta + b_0)}{2c_0} \sqrt{1 - \frac{4c_0(a_2 \delta^2 + a_1 \delta + a_0)}{(b_2 \delta^2 + b_1 \delta + b_0)^2}}$$

следует, что при $\delta \rightarrow \pm \infty$ будет

$$\rho_1 \rightarrow \infty \text{ (или } \rho_1 \rightarrow -\infty), \quad \rho_2 \rightarrow -\frac{a_2}{b_2}.$$

В первом случае (ρ_1) существует корень, уходящий в бесконечность по действительной оси. Предел для ρ_2 означает, что при $\rho = -\frac{a_2}{b_2}$ осуществляется переход корней через бесконечность по действительной оси.

Рассмотрим комплексную часть траекторий корней. Уравнение траекторий для $\omega \neq 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \omega^2 (2b_2 \delta + b_1) (a_1 b_2 - a_2 b_1) + 2b_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \delta^3 + \\ & + [4(a_2^2 c_0 - a_2 b_2 b_0 + a_0 b_2^2) + b_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1)] \delta^2 + \\ & + 2(2a_2 a_1 c_0 - a_2 b_1 b_0 - a_1 b_2 b_0 + 2a_0 b_2 b_1) \delta + (a_1^2 c_0 - a_1 b_1 b_0 + a_0 b_1^2) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Траектории корней, описываемые этим уравнением, имеют вертикальную асимптоту $\delta = -\frac{b_1}{2b_2}$. Заметим, что асимптота траекторий

корней уравнений рассматриваемого класса [2.2.0] совпадает с асимптотой траекторий корней уравнения класса [2.0] с линейным параметром.

Положив в (8) $\omega=0$, получим уравнение кратных точек. Оно может иметь одно или три действительных решения, т. е. траектории корней класса [2.2.0] могут иметь одну или три кратных точки на действительной оси.

Для иллюстрации общих свойств, установленных выше, рассмотрим пример.

$$(\rho + 2)^2 + \rho(\rho + 1)^2 + \rho^2 = 0. \quad (9)$$

Траектории корней и график параметра этого уравнения показаны на рис. 2. Поведение траекторий корней на действительной оси удобно исследовать с помощью графика параметра $\rho(\delta)$. Уравнение (9) имеет два аperiodических решения при всех значениях $\rho < 0$. С помощью этого графика могут быть найдены оба аperiodических решения для любого значения $\rho < 0$.

Рассмотрим комплексную часть траекторий корней уравнения (9). Комплексно-сопряженные корни положительного годографа выходят из двойной начальной точки под углом 90° к действительной оси и стремятся к вертикальной асимптоте $\delta = -1$. На графике параметра $\rho(\delta)$ показана зависимость параметра ρ от значения δ для точек комплексной части траекторий корней. Значение ω для каждой точки графика $\rho(\delta)$ может быть найдено из графика траекторий корней.

Хотя конфигурация траекторий корней рассмотренного примера не является единственной возможной для траекторий корней класса [2.2.0], но тем не менее она иллюстрирует их основные свойства.

Свойства траекторий корней класса [1.2.0] во многом аналогичны [2.2.0]. Траектории корней этого класса также имеют вертикальные асимптоты, определяемые уравнением $\delta = -\frac{b_1}{2b_2}$.

Особого рассмотрения требуют траектории корней класса [2.1.0]. Асимптоты траекторий корней уравнений этого класса не определяются классом уравнения, а зависят от численных значений коэффициентов уравнения. Свойства траекторий корней уравнений этого класса наиболее сильно отличаются от свойств годографов с линейным параметром. Уравнение траекторий корней класса [2.1.0] имеет вид

$$a_2 b_1^2 \omega^2 + a_2 (b_1^2 - 4a_2 c_0) \delta^2 + 2a_2 (b_1 b_0 - 2a_1 c_0) \delta + (a_1 b_1 b_0 - a_0 b_1^2 - a_1^2 c_0) = 0.$$

Это уравнение при $4a_2 c_0 < b_1^2$ определяет эллипс с полуосями, равными

$$\sqrt{\frac{a_1 b_1 b_0 - a_0 b_1^2 - a_1^2 c_0}{a_2 b_1^2}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{a_1 b_1 b_0 - a_0 b_1^2 - a_1^2 c_0}{a_2 (b_1^2 - 4a_2 c_0)}}.$$

При $b_1^2 = 4a_2 c_0$ это уравнение определяет параболу. При

$b_1^2 < 4a_2 c_0$ — гиперболу с асимптотами

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{4a_2 c_0 - b_1^2}{b_1^2}} \delta - \frac{2a_1 c_0 - b_1 b_0}{4a_2 c_0 - b_1^2}.$$

Таким образом, асимптотические свойства траекторий корней класса [2.1.0] определяются знаком $(b_1^2 - 4a_2c_0)$.

На рис. 3 в качестве примера приведены траектории корней уравнения

$$\left[p^2 - \frac{2(k_1 a_1 - k_2 a_2)}{m r^2} \right] + \rho \frac{2}{m} \left[k_1 \left(1 + \frac{a_1^2}{r^2} \right) + k_2 \left(1 + \frac{a_2^2}{r^2} \right) \right] p + \rho^2 \frac{4k_1 k_2 (a_1 + a_2)^2}{m^2 r^2} = 0$$

класса [2.1.0] (свободный параметр $\rho = \frac{1}{V}$). Это уравнение описывает движения жесткого автомобиля с боковым уводом [4].

Здесь m — масса автомобиля, V — скорость автомобиля (м/сек), $k_1 = k_2 = 1,5 mg$ — коэффициент бокового увода передних и задних колес, $r = 1,5$ м — радиус момента инерции автомобиля, $a_1 = 1,4$ м, $a_2 = 1,6$ м — расстояния (положительные) центра тяжести соответственно от передней и задней оси.

Траектории корней этого уравнения представляют собой эллипс. На рисунке показан только положительный годограф, соответствующий движению автомобиля вперед.

Перейдем к рассмотрению траекторий корней, описываемых уравнением второго порядка относительно ω^2 . Как было сказано ранее, в этом случае уравнение траекторий корней может быть решено относительно $(\omega^2 + \delta^2)$ и представлено в виде (3) или

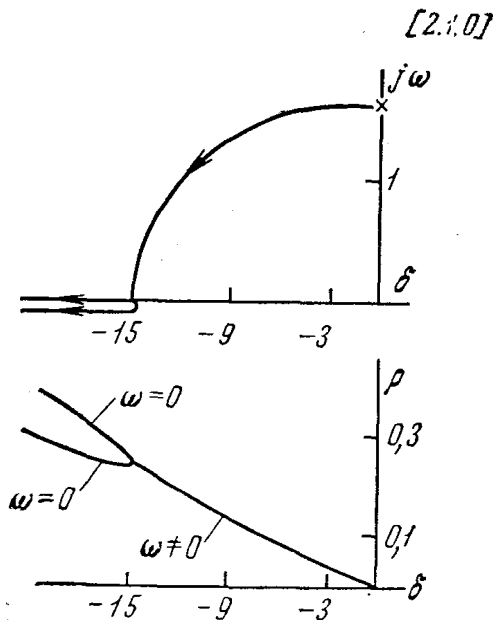


Рис. 3

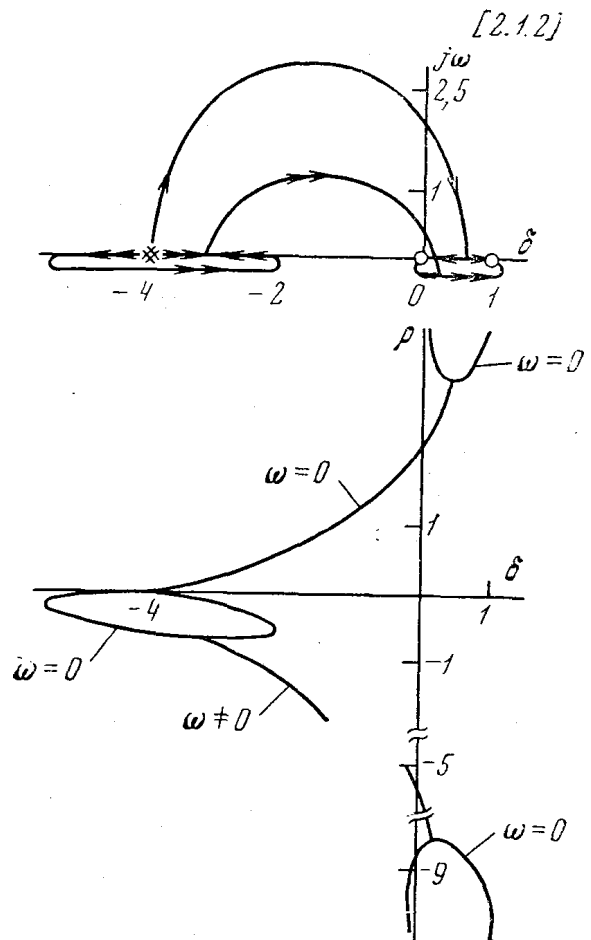


Рис. 4

$$\omega^2 = -\delta^2 - \frac{B_1 \delta + B_0}{2A} \pm \sqrt{\frac{(B_1 \delta + B_0)^2}{4A^2} - \frac{D_2' \delta^2 + D_1 \delta + D_0}{A}} = F(\delta). \quad (10)$$

Из этого уравнения следует, что комплексные ветви траекторий корней расположены только в тех областях комплексной плоскости $(j\omega, \delta)$, для которых выполняется неравенство

$$F(\delta) \geq 0. \quad (11)$$

Так как при $\delta \rightarrow \infty$ $F(\delta) < 0$, то бесконечно удаленные точки комплексной плоскости являются запрещенными для траекторий корней. Решение неравенства (11) дает возможность найти те области δ , в которых расположены траектории корней. Те значения δ , которые обращают (11) в равенство, соответствуют кратным точкам на действительной оси.

Рассмотрим траектории корней уравнения

$$(\rho + 4)^2 + \rho(-2\rho + 3) + \rho^2(\rho^2 - \rho) = 0$$

класса [2.1.2]. Траектории корней этого уравнения и график параметра показаны на рис. 4. В соответствии с неравенством (2) на действительной оси траекториям корней принадлежат два отрезка $-5,5 \leq \delta \leq -2,1$ и $-0,1 \leq \delta \leq 1,1$. Точки $-5,5$; $-2,1$; $-0,1$; $1,1$ являются точками поворота. Неравенство (11) для данного примера выполняется при $-4 \leq \delta \leq 0,6$. Точки -4 ; $-3,15$; $0,25$; $0,6$ соответствуют кратным корням. График параметра $\rho(\delta)$ дает возможность определить значение параметра ρ для любой точки траекторий корней.

Таким образом, рассмотрены основные типы траекторий корней уравнений второго порядка с квадратичным свободным параметром и приведены характерные примеры. Рассмотренные примеры иллюстрируют многообразие видов траекторий корней уравнений с квадратичным свободным параметром. Показано, что для уравнений вида (1) при $n \leq 2$, $m \leq 2$, $l \leq 2$ асимптотические свойства не всегда определяются классом уравнения, а в некоторых случаях зависят от значений коэффициентов характеристического уравнения. Проведена классификация траекторий корней в зависимости от степени уравнения корневых годографов. Для каждой группы указана возможная конфигурация траекторий корней и их асимптотические свойства. Для всех рассмотренных примеров наряду с траекториями корней построены графики параметра для действительных и комплексно-сопряженных ветвей корневых годографов. Применение графика параметра особенно удобно для действительной оси ввиду неоднозначности значений параметра при $\omega = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнения траекторий корней для уравнений класса [2.2.2]. Характеристическое уравнение:

$$(a^2\rho^2 + a_1\rho + a_0) + \rho(b_2\rho^2 + b_1\rho + b_0) + \rho^2(c_2\rho^2 + c_1\rho + c_0) = 0.$$

Уравнение траекторий корней:

$$A\omega^4 + B(\delta) \cdot \omega^2 + D(\delta) = 0, \quad (12)$$

где

$$A = a_2^2c_1^2 - 2a_2a_1c_2c_1 - a_2b_2b_1c_1 + a_2b_1^2c_2 + a_1b_2^2c_1 - a_1b_2b_1c_2 + a_1^2c_2^2, \quad (13)$$

$$B(\delta) = B_2\delta^2 + B_1\delta + B_0,$$

$$B_2 = 2A, \quad (14)$$

$$B_1 = 4a_2^2c_1c_0 - 4a_2a_1c_2c_0 - 4a_2a_0c_2c_1 - 2a_2b_2b_1c_0 - 2a_2b_2b_0c_1 + 4a_2b_1b_0c_2 + \\ + 4a_1a_0c_2^2 + 2a_1b_2^2c_0 - 2a_1b_2b_0c_2 + 2a_0b_2^2c_1 - 2a_0b_2b_1c_2,$$

$$B_0 = 2a_2a_1c_1c_0 - 2a_2a_0c_1^2 - a_2b_1^2c_0 + a_2b_1b_0c_1 - 2a_1^2c_2c_0 + 2a_1a_0c_2c_1 +$$

$$+ a_1b_2b_1c_0 - 2a_1b_2b_0c_1 + a_1b_1b_0c_2 + a_0b_2b_1c_1 - a_0b_1^2c_2,$$

$$D(\delta) = D_4\delta^4 + D_3\delta^3 + D_2\delta^2 + D_1\delta + D_0,$$

$$D_4 = A, \quad (15)$$

$$D_3 = B_1,$$

$$D_2 = B_0 + D_2',$$

$$D_2' = 4a_2^2c_0^2 - 8a_2a_0c_2c_0 - 4a_2b_2b_0c_0 + 4a_2b_0^2c_2 + 4a_0^2c_2^2 +$$

$$+ 4a_0b_2^2c_0 - 4a_0b_2b_0c_2,$$

$$D_1 = 4a_2a_1c_0^2 - 4a_2a_0c_1c_0 - 2a_2b_1b_0c_0 + 2a_2b_0^2c_1 - 4a_1a_0c_2c_0 - 2a_1b_2b_0c_0 +$$

$$+ 2a_1b_0^2c_2 + 4a_0^2c_2c_1 + 4a_0b_2b_1c_0 - 2a_0b_2b_0c_1 - 2a_0b_1b_0c_2,$$

$$D_0 = a_1^2c_0^2 - 2a_1a_0c_1c_0 - a_1b_2b_0c_0 + a_1b_0^2c_1 + a_0b_1^2c_0 - a_0b_1b_0c_1 + a_0^2c_1^2. \quad (16)$$

Вторая форма записи уравнения траекторий корней:

$$A(\omega^2 + \delta^2)^2 + (B_1\delta + B_0)(\omega^2 + \delta^2) + D_2'\delta^2 + D_1\delta + D_0 = 0. \quad (17)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бендриков Г. А., Теодорчик К. Ф. Траектории корней линейных автоматических систем. М., «Наука», 1964.
2. Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астроном., № 6, 115, 1969.
3. Буховцев Б. Б., Кулагина О. В. «Вестн. Моск., ун-та», физ., астроном., 11, № 1, 74, 1970.
4. Роккар И. Неустойчивость в механике. М., ИЛ, 1959.

Поступила в редакцию
20. 3. 1970 г.

Кафедра
физики колебаний