Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1970

УДК 539.293:538.569.57

И. С. СТОЯНОВА

РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА ФЛУКТУАЦИЯХ ПЛОТНОСТИ В СИСТЕМАХ С ДРЕЙФОВОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Рассмотрен вопрос о рассеянии света горячими электронами в полупроводниках с нелинейной вольтамперной характеристикой, обусловленной зависимостью подвижности носителей заряда от поля. Получено выражение для коэффициента экстинкации, описывающее угловое распределение рассеянного излучения и его спектральный состав.

Рассмотрим систему, находящуюся в стационарном неравновесном состоянии в пространственно-однородном не зависящем от времени электрическом поле E. Будем считать, что система имеет нелинейную N-образную вольтамперную характеристику, обусловленную зависимостью подвижности носителей от поля $\mu(E)$ (зависимость концентрации носителей от поля считается несущественной). Тогда выражение для дифференциальной проводимости[1] σ_d имеет вид

$$\sigma_d(E) = \rho\mu(E)\left[1 + \frac{d \ln \mu(E)}{d \ln E}\right], \qquad (1)$$

Здесь ρ — концентрация свободных носителей заряда.

Нагрев электронного газа, проявляющийся в зависимости $\mu(E)$, при определенных условиях может привести к возникновению отрицательной дифференциальной проводимости $\sigma_d<0$ в пространственно-однородной системе. Как известно [1—2], начиная с некоторой критической величины $|\sigma|>|\sigma_k|$; $\sigma_k<0$, зависящей от размеров образца и от некоторых кинетических характеристик носителей заряда, пространственно-однородное распределение становится неустойчивым относительно малых флуктуаций плотности заряда и поля. Когда такая система, находясь в области устойчивости, приближается к «критической точке», соответствующей наступлению неустойчивости, следует ожидать явлений, аналогичных критической опалесценции, т. е. очень сильного нарастания флуктуаций плотности носителей и соответственно коэффициента рассеяния света. Настоящая работа посвящена расчету этого эффекта.

---

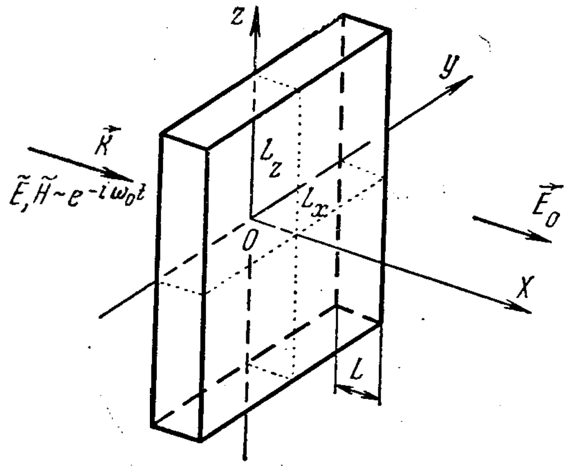
[1] В той частотной области, где можно пренебречь частотной дисперсией. (Для GaAs, например, пренебрежение частотной дисперсией законно вплоть до частот 10^{12} *сек*$^{-1}$).

§ 1. Выражение для коэффициента экстинкции

Пусть на систему действует еще слабое переменное поле электромагнитной волны $\widetilde{E}$, $\widetilde{H}$, причем падающая волна предполагается монохроматической с частотой ω_0

$$\widetilde{E},\ \widetilde{H} \sim e^{-i\omega_0 t}.$$

Рассматриваемый образец (см. рис.) имеет размеры $L_y, L_z \gg L_x = L$. В пределе $L_y, L_z \to \infty$ суммы в вычислениях заменяются интегралами.



Дифференциальный коэффициент экстинкции dh, отнесенный к элементу телесного угла do и интервалу частот $d\omega$, согласно макроскопической теории рассеяния [3], дается выражением

$$dh = \frac{1}{V} \frac{|\widetilde{E}'(R, \omega)|^2}{|\widetilde{E}|^2} do d\omega, \tag{2}$$

где $\widetilde{E}$ — поле падающей и $\widetilde{E}'$ — поле рассеянной волны[1]; V — объем системы. При решении уравнений Максвелла для поля рассеянной волны E' получается следующее выражение для коэффициента экстинкции:

$$dh = \frac{\omega^4}{(2\pi)^2 c^4 R^2 V} \left| \bar{\rho} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right|^2 \frac{(\delta\rho,\ \delta\rho)_{\bar{\varkappa},\Omega}}{\bar{\rho}^2} \frac{1}{2} (1 + \cos^2\theta)\, do d\Omega, \tag{3}$$

где $do = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$; θ — угол между направлениями распространения падающего и рассеянного света и $(\delta\rho, \delta\rho)_{\bar{\varkappa},\Omega}$ представляет четырехмерный Фурье-образ от функции корреляции плотности

$$(\delta\rho,\ \delta\rho)_{\bar{\varkappa},\Omega} = \iint \overline{\delta\rho(\bar{r}', t')\, \delta\rho(\bar{r}'', t'')}\, e^{-i\Omega(t''-t')+i\bar{\varkappa}(\bar{r}''-\bar{r}')} d^3r' d^3r'' dt' dt''.$$

В (3) введены обозначения: $\bar{\varkappa}$ — изменение волнового вектора и Ω — изменение частоты при рассеянии:

$$\bar{\varkappa} = \bar{k} - \bar{k}_0 = \frac{\omega}{c} \frac{\bar{R}}{R} - \bar{k}_0, \quad \Omega = \omega - \omega_0.$$

Выражение $(\delta\rho, \delta\rho)_{\bar{\varkappa},\Omega}$ удобно представить следующим образом:

$$(\delta\rho,\ \delta\rho)_{\bar{\varkappa},\Omega} = \iint d^3r d^3r' dt dt' e^{-i\Omega t + i\bar{\varkappa}\bar{r}}\, \overline{\delta\rho(\bar{r}', t')\, \delta\rho(\bar{r}' + \bar{r}, t' + t)}. \tag{4}$$

Так как мы рассматриваем пространственно-однородную систему в стационарном неравновесном состоянии, то подынтегральное выражение $\overline{\delta\rho\delta\rho}$ в (4) фактически от переменных r', t' не зависит, так что мы можем положить, например, $t' = 0$.

---

[1] Точнее $\widetilde{E}'(\bar{R}, \omega)$ есть Фурье-компонент разложения

$$\widetilde{E}'(\vec{R}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \widetilde{E}'(\vec{R}, \omega).$$

§ 2. Флуктуации плотности

Далее наша задача сводится к нахождению функции $\delta\rho(\bar{r}, t)$. Последняя удовлетворяет следующей системе уравнений [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x} j = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} E = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\rho - \rho_0), \tag{5}$$

$$j = \rho\mu(E) E - D \frac{\partial}{\partial x}\rho,$$

а для функции:

$$\rho(x, t) = \rho_0 - \delta\rho(x, t), \quad j(x, t) = j_0 + \delta j(x, t),$$
$$E(x, t) = E_0 + \delta E(x, t). \tag{6}$$

Линеаризуя, получаем систему для флуктуаций названных величин:

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\rho + \frac{\partial}{\partial x}\delta j = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\delta E = \frac{4\pi}{\varepsilon}\delta\rho,$$
$$\delta j = v_0 \delta\rho + \sigma_d \delta E - D \frac{\partial}{\partial x}\delta\rho, \tag{7}$$

где $v_0 = \mu(E_0) E_0$, D — коэффициент диффузии.

Полученная система уравнений линейна и не содержит в явном виде t. Для ее решения применим операционный метод. Введем лапласовский образ от искомых функций стандартным равенством

$$\delta\rho_p(x) = \int_0^\infty dt e^{-pt}\delta\rho(x, t); \quad Re\, p > 0 \tag{8}$$

и аналогично для величин $\delta E_p(x)$, $\delta j_p(x)$.

Для $\delta\rho_p(x)$ находим

$$\hat{L}\delta\rho_p(x) - \frac{p}{D}\delta\rho_p(x) = g(x), \tag{9}$$

где $g(x) = \delta\rho(x, 0)$ — заданная начальная флуктуация плотности, и через $\hat{L}$ обозначен оператор

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{v_0}{D}\frac{d}{dx} - \frac{4\pi\sigma_d}{\varepsilon D}. \tag{10}$$

Обозначим через λ и Ψ_λ собственные значения и собственные функции оператора $\hat{L}$. Последний легко эрмитизуется и в результате (с учетом условия нормировки) получаем

$$\lambda_n = -\left(\frac{v_0}{2D}\right)^2 - \frac{4\pi\sigma d}{\varepsilon D} - \left(\frac{\pi}{L} n\right)^2, \quad \Psi_n(x) = e^{(v_0/2D)x}\vartheta_n(x),$$

где

$$\vartheta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi}{L} nx, \quad (n = 1, 2, \ldots,).$$

[1] Система сразу записана в одномерном виде, так как ось x выбрана по направлению постоянного поля, а зависимость $\delta\rho$ от y и z отделяется и носит тривиальный характер.

Для $\delta\rho_p(x)$ получаем

$$\delta\rho_p(x) = e^{(v_0/2D)x} \sum_n \frac{A_n}{\lambda_n - \frac{p}{D}} \vartheta_n(x), \tag{11}$$

где

$$A_n = \int_0^L dx g(x) e^{(v_0/2D)x} \vartheta_n(x).$$

Функция $\delta\rho_p(x)$, как следует из (11), аналитична в плоскости комплексной переменной p везде, кроме точек

$$p_n = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\sigma_d - \frac{v_0^2}{4D} - D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2, \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Пользуясь обратным преобразованием Лапласса и формулой (12), можем определить асимптотический вид функции $\delta\rho(x, t)$ при больших значениях t. Таким образом, получаем

$$\delta\rho(x, t) = \delta\rho(x) e^{p_1 t}, \tag{13}$$

где $t>0$ достаточно большое, $p_1<0$ и

$$\delta\rho(x) = A_1 \sqrt{\frac{2}{L}} e^{(v_0/2D)x} \sin\frac{\pi}{L} x.$$

§ 3. Критическое рассеяние

Как видно из (13), появлению неустойчивости соответствует предел $p_1 \to 0$ и из (12) получаем условие неустойчивости:

$$|\sigma_d(E)| \geqslant \frac{\varepsilon}{4\pi} D \left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{v_0(E)}{2D}\right)^2\right], \quad \sigma_d < 0. \tag{14}$$

Из (13) следует, что переменные x и t в выражении для функции $\delta\rho(x, t)$ разделяются, и, полагая

$$\int \delta\rho(\vec{r}_1' 0)\, \delta\rho(\vec{r} + \vec{r}, 0)\, e^{-i\vec{\varkappa}\vec{r}} d^3r\, d^3r' = (\delta\rho, \delta\rho)_{\vec{\varkappa}}, \tag{15}$$

мы можем представить (4) в следующем виде:

$$(\delta\rho, \delta\rho)_{\vec{\varkappa}, \Omega} = (\delta\rho, \delta\rho)_{\vec{\varkappa}} 2Re \int_0^\infty e^{p_1 t} e^{i\Omega t} dt, \qquad p_1 < 0$$

или

$$(\delta\rho, \delta\rho)_{\vec{\varkappa}, \Omega} = (\delta\rho, \delta\rho)_{\vec{\varkappa}} \frac{-2p_1}{p_1^2 + \Omega^2}. \tag{16}$$

Выражение $(\delta\rho, \delta\rho)\vec{\varkappa}$ есть корреляционная функция флуктуации плотности заряда в неравновесном стационарном состоянии, возникшем в полупроводнике при наложении сильного постоянного электрического поля.

В предположении $\varkappa l_e \ll 1$; $\frac{4\pi\sigma_d}{\varepsilon D} l_e^2 \ll 1$, где l_e — длина свободного пробега для электронов проводимости [4], можем написать

$$(\delta\rho, \delta\rho)_{\vec{\varkappa}} \sim \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + \frac{4\pi|\sigma_d|}{\varepsilon D}}. \tag{17}$$

Заметим далее, что согласно (1)[1]

$$\left|\bar{\rho}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right|^2=\left(\frac{4\pi}{\omega}\right)^2|\sigma_d|^2.$$

Тогда для коэффициента экстинкции окончательно получаем

$$dh(\omega_0, E, \Omega, \theta)\sim(\omega_0+\Omega)^2\sigma_d^2(E)\frac{\varkappa^2(\omega_0,\theta)}{\varkappa^2(\omega_0,\theta)+\frac{4\pi}{\varepsilon D}|\sigma_d(E)|}\times$$

$$\times\frac{|p_1(E)|}{p_1^2(E)+\Omega^2}(1+\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\Omega, \qquad (18)$$

где $\sigma_d(E)$ дается выражением (1), $p_1(E)$ — выражением (12) и $\varkappa^2(\theta,\omega_0)=2\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2(1-\cos\theta)$.

Из (18) видно, что при $\sigma_d=0$; $\frac{d^2h}{d\Omega\, d0}=0$; т. е. рассеяние на электроны проводимости не происходит, что и следует ожидать, так как в этом случае система ведет себя как диэлектрик.

Когда система приближается к критической точке, т. е. когда постоянное поле стремится к своему критическому значению E_k, для которого

$$\sigma_d(E_k)=-\frac{\varepsilon}{4\pi}\left[\frac{v_0^2(E_k)}{4D}+\frac{\pi^2 D}{L^2}\right] \text{ и } p_1(E_k)=0,$$

то величина

$$f(\Omega)=\frac{|p_1|}{p_1^2+\Omega^2},$$

характеризующая спектральную интенсивность и входящая в выражение для коэффициента экстинкции, стремится к функции $\delta(\Omega)$.

Таким образом, при приближении напряженности постоянного поля к своему критическому значению интенсивность рассеянного излучения должна резко возрастать, а изменение частоты при рассеянии — стремиться к нулю.

В заключение выражаю глубокую признательность В. Л. Бонч-Бруевичу за предложенную тему и многочисленные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ridley B. K. J. Phys. Chem. Sol., 22, 155, 1961.
2. Бонч-Бруевич В. Л. «Физика твердого тела», 6, 2047, 1964.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
4. Ганцевич С. В., Гуревич В. Л., Катилюс Р. ЖЭТФ, 57, 508, 1969.

Поступила в редакцию
6. 3 1970 г.

Кафедра
физики полупроводников

[1] Мы использовали выражение для комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon=\varepsilon_1+i\frac{4\pi}{\omega}\sigma_d$ и учли, что ε_1 фактически от плотности электронов проводимости не зависит.