Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1970

УДК 621.375.9:535(206.3)

П. С. ЛАНДА

РАСЧЕТ ПОЛЯРИЗАЦИИ АКТИВНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА ПРИ СИЛЬНОМ ПОЛЕ

Проведен расчет поляризации рабочего вещества в кольцевом лазаре с учетом пространственной модуляции населенностей. Рассмотрены случаи однородного ($\gamma_{ab} \gg ku$) и неоднородного ($\gamma_{ab} \ll ku$) уширения линии. Для случая однородного уширения получено точное выражение вектора поляризации. В случае неоднородного уширения выражение для вектора поляризации получается в виде бесконечной дроби.

Обычно при расчете поляризации в кольцевом лазере используют приближение слабого поля [1]. Однако возможны такие режимы генерации, где это приближение не справедливо. Поэтому представляет интерес вычислить поляризацию и инверсную населенность, не ограничиваясь случаем слабого поля. При этом необходимо учитывать модуляцию населенностей, возникающую под действием поля. Аналогичный расчет для режима стоячей волны в линейном лазере проведен Стэнхольмом и Лэмбом [2].

При задании поля в виде двух встречных волн

$$\vec{E}(x, t) = \frac{1}{2}\left[\vec{E}_1 e^{-i(\omega t - kx + \varphi_1)} + \vec{E}_2 e^{-i(\omega t + kx + \varphi_2)} + \text{к. с.}\right] \quad (1)$$

вектор поляризации $\vec{P}(x, t)$ может быть представлен в виде

$$\vec{P}(x, t) = \frac{1}{2}\left[\vec{P}_1 e^{-i(\omega t - kx + \varphi_1)} + \vec{P}_2 e^{-i(\omega t + kx + \varphi_2)} + \text{к. с.}\right]. \quad (2)$$

Здесь

$$\vec{P}_{1,2} = \frac{\omega}{\pi L} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^L \vec{P}(x, t)\, e^{i(\omega t \mp kx + \varphi_{1,2})} dx\, dt. \quad (3)$$

В выражении (3) вектор поляризации $\vec{P}(x, t)$ определяется недиагональными элементами матрицы плотности известным образом.

Из уравнений для матрицы плотности [1] следует, что при задании поля $\vec{E}$ в виде (1) диагональные элементы матрицы плотности, вообще говоря, содержат все четные гармоники по времени и координате, а недиагональные — все нечетные. Однако учет второй и более высоких гармоник по времени вносит малый вклад в окончательный результат (меньше или порядка $\gamma_{ab}|\omega$). Поэтому необходимо учесть лишь пространственные гармоники. Учитывая это замечание, можно считать, что диагональные элементы матрицы плотности не зависят от времени, а недиагональные меняются во времени по гармоническому закону, т. е.

$$\rho_{ab}(x, t) = \tilde{\rho}_{ab}(x)\, e^{-i(\omega t+\varphi)}, \quad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \tag{4}$$

Введя разность и сумму населенностей, $D = \rho_a - \rho_b$, $R = \rho_a + \rho_b$, и подставляя в уравнения для матрицы плотности выражения (1) и (4), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$v\frac{dD}{dx} = -\gamma_+(D - D^{(0)}) + \gamma_-(R - R^{(0)}) - \frac{ie}{\hbar}[\vec{r}_{ba}\rho_{ab}(\vec{E}_1 e^{i\Phi/2-ikx} + \vec{E}_2 e^{-i\Phi/2+ikx}) - \text{к. с.}],$$

$$v\frac{dR}{dx} = \gamma_-(D - D^{(0)}) - \gamma_+(R - R^{(0)}), \tag{5}$$

$$v\frac{d\tilde{\rho}_{ab}}{dx} = (i\mu - \gamma_{ab})\tilde{\rho}_{ab} - \frac{ie}{2\hbar}\vec{r}_{ab}D(\vec{E}_1 e^{-i\Phi/2+ikx} + \vec{E}_2 e^{i\Phi/2-ikx}),$$

$$\tilde{\rho}_{ba} = \tilde{\rho}_{ab}^{*}.$$

Здесь $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\mu = \omega - \omega_{ab}$, $\gamma_\pm = (\gamma_b \pm \gamma_a)/2$.

Для случая неподвижных атомов систему уравнений (5) можно решить точно. В результате получим

$$D = D^{(0)}\{1 + g[aE_1^2 + aE_2^2 + 2aE_1E_2\cos(2kx - \Phi)]\}^{-1} \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\vec{P}_{1,2} = \frac{e^2 \cdot n|\vec{r}_{ab}|^2 D^{(0)}(\mu - i\gamma_{ab})}{6\hbar\gamma_{ab}^2 aE_{1,2}^2}\vec{E}_{1,2}\left\{1 - \frac{1 \mp ga(E_1^2 - E_2^2)}{\sqrt{1 + 2ga(E_1^2 + E_2^2) + g^2a^2(E_1^2 - E_2^2)^2}}\right\}. \tag{7}$$

В выражениях (6) и (7) обозначено

$$a = \frac{e^2|\vec{r}_{ab}|^2}{6\hbar^2\gamma^2}, \quad \gamma^2 = \frac{\gamma_a\gamma_b\gamma_{ab}}{2\gamma_+}, \quad g = \frac{\gamma_{ab}^2}{\mu^2 + \gamma_{ab}^2}.$$

Для случая движущихся атомов решение системы уравнений (5) будем искать в виде разложений в ряд Фурье, т. е. положим

$$D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-in\Phi/2} e^{inkx}, \quad R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-in\Phi/2}e^{inkx}, \tag{8}$$

$$\tilde{\rho}_{ab} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_{abn} e^{-in\Phi/2} e^{inkx}, \quad \tilde{\rho}_{ba} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho_{ban} e^{-in\Phi/2} e^{inkx}, \tag{9}$$

Легко убедиться, что вектора поляризации $\vec{P}_{1,2}$ определяются лишь амплитудами первых гармоник величины $\tilde{\rho}_{ab}$, т. е.

$$\vec{P}_{1,2} = 2en\vec{r}_{ba}\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{ab\pm 1}(v)\, dv. \tag{10}$$

Подставим выражения (8), (9) в уравнения (5) и введем новые переменные:

$$u_n = \frac{e}{\hbar\gamma}(\vec{r}_{ba}\vec{E}_1\rho_{abn} - \vec{r}_{ab}\vec{E}_2\rho_{ban}),$$

$$v_n = \frac{e}{\hbar\gamma}(\vec{r}_{ba}\vec{E}_2\rho_{abn} - \vec{r}_{ab}\vec{E}_1\rho_{ban}).$$

Приравнивая коэффициенты при отдельных гармониках ряда Фурье, получим следующую систему уравнений для переменных D_n, u_n и v_n:

$$\frac{(ikvn+\gamma_a)(ikvn+\gamma_b)}{ikvn+\gamma_+} D_n = 2\frac{\gamma^2}{\gamma_{ab}} D^{(0)}\delta_{n0} - i\gamma(u_{n+1}+v_{n-1}), \tag{11}$$

$$u_n = 2\frac{\gamma}{\gamma_{ab}}[A_1(n)D_{n-1} + A_3(n)D_{n+1}],$$

$$v_n = 2\frac{\gamma}{\gamma_{ab}}[A_3(n)D_{n-1} + A_2(n)D_{n+1}]. \tag{12}$$

Здесь

$$A_{1,2}(n) = \frac{\gamma_{ab}}{2}\left[\frac{aE_{1,2}^2}{\mu - kvn + i\gamma_{ab}} - \frac{aE_{2,1}^2}{\mu + kvn - i\gamma_{ab}}\right],$$

$$A_3(n) = \frac{\gamma_{ab}}{2} aE_1E_2\left[\frac{1}{\mu - kvn + i\gamma_{ab}} - \frac{1}{\mu + kvn - i\gamma_{ab}}\right].$$

Обозначим

$$x_n = \begin{cases} D_n/D_{n-2} & \text{при} \quad n \geqslant 2 \\ D_n/D_{n+2} & \text{при} \quad n \leqslant -2. \end{cases} \tag{13}$$

Из уравнений (5) следует, что

$$\rho_{ab\pm1} = \frac{e\vec{r}_{ab}}{2\hbar} D_0 \frac{\vec{E}_{1,2} + x_{\pm2}\vec{E}_{2,1}}{\mu \pm kv + i\gamma_{ab}}. \tag{14}$$

Исключая из уравнений (11) и (12) переменные u_n и v_n, найдем x_2 и x_{-2}:

$$x_2 = i\frac{\gamma}{\gamma_{ab}} \cfrac{B_3(2)}{B_1(2) + \cfrac{\gamma^2}{\gamma_{ab}^2}\cfrac{B_2(2)B_3(4)}{B_1(4) + \cfrac{\gamma_2}{\gamma_{ab}^2}\cfrac{B_2(4)B_3(6)}{B_1(6) + \ldots}}}, \tag{15}$$

$$x_{-2} = i\frac{\gamma}{\gamma_{ab}} \cfrac{B_2(-2)}{B_1(-2) + \cfrac{\gamma^2}{\gamma_{ab}^2}\cfrac{B_3(-2)B_2(-4)}{B_1(-4) + \cfrac{\gamma^2}{\gamma_{ab}^2}\cfrac{B_3(-4)B_2(-6)}{B_1(-6) + \ldots}}}. \tag{16}$$

Здесь

$$B_1(n) = 1 + 2\frac{\gamma^2}{\gamma_{ab}}\frac{kvn - i\gamma_+}{(kvn - i\gamma_a)(kvn - i\gamma_b)}[A_1(n+1) + A_2(n-1)],$$

$$B_2(n) = 2i\frac{\gamma(kvn - i\gamma_+)}{(kvn - i\gamma_a)(kvn - i\gamma_b)} A_3(n+1),,$$

$$B_3(n) = 2i\frac{\gamma(kvn - i\gamma_+)}{(kvn - i\gamma_a)(kvn - i\gamma_b)} A_3(n-1).$$

Очевидно, что $x_2 = x_{-2}^*$.

Для определения D_0 запишем уравнения (11) при $n=0$. Решая его, найдем

$$D_0 = \frac{D^{(0)}}{B_1(0) + \dfrac{\gamma}{\gamma_{ab}} Im\,\{B_2(0)\, x_2\}}. \tag{17}$$

Подставляя выражения (15), (16), (17) в (14) и полагая распределение атомов по скоростям максвелловским, получим

$$\vec{P}_{1,2} = \frac{d}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\vec{E}_{1,2} + x_{\pm 2}\vec{E}_{2,1}) \exp\{-v^2/2u^2\}}{\left[B_1(0) + \dfrac{\gamma}{\gamma_{ab}} Im\,\{B_2(0)\, x_2\}\right](\mu \mp kv + i\gamma_{ab})}\, d(kv). \tag{18}$$

Здесь

$$d = \frac{4\pi^2 e^2 |\vec{r}_{ab}|^2 n D^0}{3\hbar \sqrt{2\pi}\, ku}.$$

Выражение (18) справедливо при любых параметрах лазера и произвольных значениях полей встречных волн. Однако в общем виде оно является весьма сложным. Значительные упрощения получаются в двух частных случаях: во-первых, в случае достаточно малого поля, когда $aE_{1,2}^2 \ll 1$, во-вторых, в случае, когда $\gamma^2 \ll \gamma_{ab}^2$, т. е. $\gamma_a, \gamma_b \ll \gamma_{ab}$. Первому случаю соответствуют результаты работы [1], а второму случаю — результаты работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Климонтович Ю. Л., Ланда П. С., Ларионцев Е. Г. ЖЭТФ, **52**, 1616, 1967.
2. Stenholm S., Lamb W. E. Phys. Rev., **181**, 618, 1969.
3. Климонтович Ю. Л., Ланда П. С. ЖЭТФ, 58, 1970.

Поступила в редакцию
2. 4 1970 г.

Кафедра
общей физики для мехмата