Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 6 — 1970

УДК 536.750:53:519.25

Р. Л. СТРАТОНОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАЦИОННОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ С ВРЕМЕННО-ЧЕТНЫМИ И ВРЕМЕННО-НЕЧЕТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ (II)

Приведены все даваемые нелинейной теорией независимые четырехиндексные соотношения. В рамках линейно-квадратично-кубической теории рассмотрена проблема выражения флуктуационных характеристик процесса через диссипационные характеристики, получаемые из феноменологических уравнений. Использована диссипативная функция нелинейной теории.

В настоящей работе продолжается начатое в [1] последовательное рассмотрение соотношений флуктуационно-диссипационной термодинамики с прогрессирующим числом индексов для того случая, когда имеются как временно-четные, так и временно-нечетные (меняющие знак при обращении времени) параметры. Вначале приводятся все четырехиндексные соотношения, т. е. соотношения кубической теории, получаемые методом, описанным в [1]. Рассмотрение ограничено неквантовым марковским случаем.

Далее рассматривается проблема вычисления флуктуационных характеристик процесса по заданным диссипационным характеристикам, получаемым из феноменологических уравнений. Эта проблема полностью решается в рамках линейно-квадратичной теории. В результате отыскиваются обычные диффузионные коэффициенты, теперь уже не постоянные, а также следующий диффузионный коэффициент (третьего порядка). Сложнее дело обстоит с четырехиндексной (кубической) теорией. При решении указанной задачи в ней остается произвол в выборе матриц (23) или (26), обладающих известными свойствами симметрии. Эти матрицы должны быть определены из дополнительных соображений динамического характера.

Результаты кубической теории становятся особенно важными в том частном случае, когда феноменологические уравнения обладают свойствами симметрии, благодаря которым исчезают эффекты квадратичной теории, обычно более крупные, чем кубические эффекты. Тогда кубические эффекты представляют собой важнейшую, основную поправку к результатам линейной теории. Есть основания предполагать, что в этом частном случае, как правило, справедливы соотношения

$$K_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = -K_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_4} - K_{\alpha_2,\alpha_1\alpha_3\alpha_4}, \tag{1}$$

благодаря которым устраняется произвол, связанный с отысканием четырехиндексных флуктуационных характеристик. Соотношения (1) не противоречат равенствам (2) и (5); они представляют собой ослабление результатов типа тех, которые приведены в § 6 работы [2]. Следствием из (1) и формул (18), (IV. 3 а, в, д), (IV. 2, б, г) являются такие соотношения:

$$K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = -2K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\alpha_4} = 4\frac{\partial^4 F}{\partial Z_{\alpha_1}\partial Z_{\alpha_2}\partial Z_{\alpha_3}\partial Z_{\alpha_4}}$$

(число временно-четных индексов четно),

$$K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\alpha_4} = K_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_4} + K_{\alpha_2,\alpha_1\alpha_3\alpha_4} + K_{\alpha_3,\alpha_1\alpha_2\alpha_4} - K_{\alpha_4,\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$$

(число временно-четных индексов нечетно). Данные соотношения, однако, имеют меньшую степень общности, нежели соотношения основного текста.

§ 1. Четырехиндексные соотношения

Методом, описанным в [1], можно получать термодинамические соотношения, затрагивающие произвольное число индексов. Мы ограничимся, однако, особым рассмотрением четырехиндексных соотношений. Последние важны потому, что они в некоторых отношениях более сходны с важными двухиндексными соотношениями линейной теории.

Каждое «элементарное» соотношение получается дифференцированием равенства (16) или (17) из [1] в нулевой точке. Будем его нумеровать четырьмя индексами, например, четверкой (j_1, $i_1j_2j_3$). Это означает, что берется равенство (16) для $K_{j'_1}$ или (17), если рассматривается, скажем, четверка (, $i_1i_2j_1j_2$) и дифференцируется по $X_{i_1}, Y_{j_2}Y_{j_3}$.

Не требующие дифференцирования соотношения ($i_1i_2i_3j$), ($ij_1j_2j_3$) имеют вид

$$K_{i_1i_2i_3j}(0, 0) = 0; \tag{IV.4б}$$

$$K_{ij_1j_2j_3} = 0. \tag{IV.4г}$$

Соотношения с одним дифференцированием, а именно соотношения

$$(i_1i_2i_3,\ i_4);\ (i_1i_2j_1,\ j_2);\ (i_1j_1j_2,\ i_2);\ (j_1j_2j_3,\ j_4)$$

дают результаты

$$K_{i_1i_2i_3,i_4} = K_{i_1i_2i_4,i_3} = K_{i_1i_3i_4,i_2} = K_{i_1i_2i_3,i_4} = -\frac{1}{2}K_{i_4i_2i_3i_1}; \tag{IV.3а}$$

$$K_{i_1i_2j_1,j_2} = K_{i_1i_2j_2,j_1} = K_{i_1j_1j_2,i_2} = K_{i_2j_1j_2,i_1} = -\frac{1}{2}K_{i_1i_2j_1j_2}; \tag{IV.3в}$$

$$K_{j_1j_2j_3,j_4} = K_{j_1j_2j_4,j_3} = K_{j_1j_3j_4,j_2} = K_{j_2j_3j_4,j_1} = -\frac{1}{2}K_{j_1j_2j_3j_4}. \tag{IV.3д}$$

Найденные равенства будут учитываться при выводе последующих соотношений. Перейдем к соотношениям, содержащим два дифференцирования. Соотношения $(i_1 i_2, i_3 j)$; $(i_1 j, i_2 i_3)$; $(ij_1, i_2 j_3)$; $(j_1 j_2 i, j_3)$ дают

$$2K_{i_1 i_2, i_3 j} = -K_{i_1 i_2 i_3, j} - K_{i_1 i_2 j, i_3}, \qquad \text{(IV.2б)}$$

$$2K_{i_1 j, i_2 i_3} = -K_{i_1 i_2 j, i_3} - K_{i_1 i_3 j, i_2};$$

$$2K_{ij_1, j_2 j_3} = -K_{ij_1 j_2, j_3} - K_{ij_1 j_3, j_2}; \qquad \text{(IV.2г)}$$

$$2K_{j_1 j_2, j_3 i} = -K_{j_1 j_2 j_3, i} - K_{j_1 j_2 i, j_3}.$$

Соотношения с тремя дифференцированиями $(i_1, i_2 i_3 i_4)$, $(i_1, i_2 j_1 j_2)$, $(j_1, i_1 i_2 j_2)$, $(j_1, j_2 j_3 j_4)$ дают такие новые результаты:

$$2K_{i_1, i_2 i_3 i_4} + K_{i_1 i_2, i_3 i_4} + K_{i_1 i_3, i_2 i_4} + K_{i_1 i_4, i_2 i_3} = \frac{1}{2} K_{i_1 i_2 i_3 i_4}; \qquad \text{(IV.1а)}$$

$$2K_{i_1, i_2 j_1 j_2} + K_{i_1 i_2, j_1 j_2} + K_{i_1 j_1, i_2 j_2} + K_{i_1 j_2, i_2 j_1} = \frac{1}{2} K_{i_1 i_2 j_1 j_2};$$

$$\text{(IV.3в)}$$

$$2K_{j_1, i_1 i_2 j_2} + K_{j_1 i_1, i_2 j_2} + K_{j_1 i_2, i_1 j_2} + K_{j_1 j_2, i_1 i_2} = \frac{1}{2} K_{i_1 i_2 j_1 j_2};$$

$$2K_{j_1, j_2 j_3 j_4} + K_{j_1 j_2, j_3 j_4} + K_{j_1 j_3, j_2 j_4} + K_{j_1 j_4 j_2 j_3} = \frac{1}{2} K_{j_1 j_2 j_3 j_4}. \qquad \text{(VI.3д)}$$

Из соотношений же $(i_1, i_2 i_3 j)$, $(j, i_1, i_2 i_3)$, $(i, j_1 j_2 j_3)$, $(j_1, ij_2 j_3)$ имеем равенства

$$K_{i_1 i_2 i_3, j} = K_{i_1 j, i_2 i_3} - K_{i_1 i_2, i_3 j} - K_{i_1 i_3, i_2, j},$$

$$\text{(IV.2б)}$$

$$K_{ji_1 i_2, i_3} = K_{ji_3, i_1 i_2} - K_{ji_1, i_2 i_3} - K_{ji_2, i_1 i_3};$$

$$K_{ij_1 j_2, j_3} = K_{ij_3, j_1 j_2} - K_{ij_1, j_2 j_3} - K_{ij_2, j_1 j_3};$$

$$\text{(IV.2г)}$$

$$K_{j_1 j_2 j_3, i} = K_{j_1 i, j_2 j_3} - K_{j_1 j_2, j_3 i} - K_{j_1 j_3, j_2 i},$$

которые эквивалентны (IV. 2б) и (IV. 2г.)

Остаются соотношения с четырьмя дифференцированиями. Новые результаты даются лишь соотношениями $(i_1 i_2 i_3 j)$ и $(ij_1 j_2 j_3)$, они принимают вид

$$K_{ji_1, i_2 i_3} + K_{i_2 i_3, ji_1} = K_{ji_2, i_1 i_3} + K_{i_1 i_3, ji_2} = K_{ji_3, i_1 i_2} + K_{i_1 i_2, ji_3} =$$

$$= -K_{i_1, i_2 i_3 j} - K_{i_2, i_1 i_3 j} - K_{i_3, i_1 i_2 j} - K_{j, i_1 i_2 i_3}; \qquad \text{(VI.1б)}$$

$$K_{j_1 i, j_2 j_3} + K_{j_2 j_3, ij_1} = -K_{i, j_1 j_2 j_3} - K_{j_1, j_2 j_3 i} - K_{j_2, j_1 j_3 i} - K_{j_3, j_1 j_2 i}. \qquad \text{(VI.1г)}$$

Этим исчерпываются четырехиндексные соотношения. Их вид существенно зависит от того, является ли число временно-четных индексов четным (случаи а, в, д) или нечетным (случаи б, г.). Формулы типа (IV. 1а, в, д) совпадают с формулой (14) из [3].

§ 2. Проблема выражения флуктуационных характеристик через диссипационные в линейно-квадратичной теории. Диссипативная функция

Диссипативная функция общей (нелинейной и, в частности, линейной) теории определяется [4] формулой

$$2F(X, Y) = -K_i(X, Y) X_i - K_j(X, Y) Y_j. \qquad (2)$$

В соответствии с этой формулой F представляет собой производную $dw_{\text{ст}}/dt$, взятую без учета флуктуаций. В линейной теории диссипативная функция частично определяет феноменологические уравнения движения

$$\dot{A}_\alpha = K_\alpha (X, Y) \qquad (3)$$

и полностью определяет диффузионные коэффициенты $K_{\alpha_1\alpha_2}$. Здесь α_s может соответствовать как временно-четным параметрам ($\alpha_s = i$), так и временно-нечетным ($\alpha_s = j$). В самом деле, из (2) имеем

$$2F(X, Y) = -K_{i_1, i_2}(0, 0)\, X_{i_1} X_{i_2} - K_{j_1, j_2}(0, 0)\, Y_{j_1} Y_{j_2} + O(X^3, Y^3), \qquad (4)$$

где, как обычно, индекс после запятой обозначает дифференцирование. При выводе (4) учтены соотношения (I. 1а, б), (II. 1б) из [1]. Далее уравнения (II.1а, в) из [1] означают, что

$$\begin{aligned} K_{i_1 i_2}(X, Y) &= -2K_{i_1, i_2}(0, 0) + O(X, Y); \\ K_{j_1 j_2}(X, Y) &= -2K_{j_1, j_2}(0, 0) + O(X, Y). \end{aligned} \qquad (5)$$

Из (2) и (3) легко получить

$$K_{i_1 i_2}(X, Y) = 2\frac{\partial^2 F(X, Y)}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2}} + O(X, Y);$$

$$K_{j_1 j_2}(X, Y) = 2\frac{\partial^2 F(X, Y)}{\partial Y_{j_1} \partial Y_{j_2}} + O(X, Y). \qquad (6)$$

Вследствие (4) соотношения (II. 2б) из [1], кроме того, имеем

$$K_{ij}(X, Y) = 2\frac{\partial^2 F(X, Y)}{\partial X_i \partial Y_j} + O(X, Y) = O(X, Y). \qquad (7)$$

Формулы (6), (7) можно объединить в одну:

$$K_{\alpha_1\alpha_2}(X, Y) = 2\frac{\partial^2 F(X, Y)}{\partial Z_{\alpha_1} \partial Z_{\alpha_2}} + O(X, Y); \qquad (8)$$

$$(Z_i = X_i,\ Z_j = Y_j).$$

Рассмотрим как формула (8), а также формула

$$K_{\alpha_1\alpha_2}(Z) = -\frac{\partial K_{\alpha_1}(Z)}{\partial Z_{\alpha_2}} - \frac{\partial K_{\alpha_2}(Z)}{\partial Z_{\alpha_1}} + O(Z) \qquad (9)$$

линейной теории модифицируются в линейно-квадратичной теории, т. е. в теории, использующей соотношения до трехиндексных включительно. Для этого возьмем разложение Маклорена сносов $K_\alpha(Z)$ с учетом квадратичных членов:

$$K_{\alpha_1}(Z) = K_{\alpha_1, \alpha_2}(0)\, Z_{\alpha_2} + \frac{1}{2} K_{\alpha_1, \alpha_2\alpha_3}(0) \cdot Z_{\alpha_2} \cdot Z_{\alpha_3} + O(Z^3). \qquad (10)$$

При этом получим

$$\frac{\partial K_{\alpha_1}(Z)}{\partial Z_{\alpha_2}} + \frac{\partial K_{\alpha_2}(Z)}{\partial Z_{\alpha_1}} = K_{\alpha_1, \alpha_2}(0) + K_{\alpha_2, \alpha_1}(0) + [K_{\alpha_1, \alpha_2\alpha}(0) +$$

$$+ K_{\alpha_2, \alpha_1\alpha}(0)]\, Z_\alpha + O(Z^2),$$

а в силу (2);

$$-2F = K_{\alpha_1, \alpha_2}(0)\, Z_{\alpha_1} Z_{\alpha_2} + \frac{1}{2} K_{\alpha_1, \alpha_2\alpha_3}(0)\, Z_{\alpha_1} \cdot Z_{\alpha_2} \cdot Z_{\alpha_3} + O(Z^4),$$

и, следовательно,

$$-2\frac{\partial^2 F(Z)}{\partial Z_{\alpha_1}\partial Z_{\alpha_2}} = K_{\alpha_1,\alpha_2}(0) + K_{\alpha_2,\alpha_1}(0) + [K_{\alpha_1,\alpha_2\alpha}(0) + K_{\alpha_2,\alpha_1\alpha}(0) + \\ + K_{\alpha,\alpha_1\alpha_2}(0)]\cdot Z_\alpha + O(Z^2). \tag{11}$$

Выразим диффузионные коэффициенты

$$K_{\alpha_1\alpha_2}(Z) = K_{\alpha_1\alpha_2}(0) + K_{\alpha_1\alpha_2,\alpha}(0)\cdot Z_\alpha + O(Z^2). \tag{12}$$

через диссипационные характеристики. Комбинируя соотношения

$$K_{\alpha_1\alpha_2}(0) = -K_{\alpha_1,\alpha_2}(0) - K_{\alpha_2,\alpha_1}(0) \tag{13}$$

линейной теории и соответствующие трехиндексные соотношения (III.1. а, б, в, г), которые можно записать так:

$$K_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3}(0) = \pm K_{\alpha_3,\alpha_1\alpha_2}(0) - K_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3}(0) - K_{\alpha_2,\alpha_1\alpha_3}(0) \tag{14}$$

(берется знак +, если среди $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ имеется нечетное число временно-четных индексов i, и знак — в противном случае), будем иметь

$$K_{i_1i_2}(Z) = -K_{i_1,i_2}(0) - K_{i_2,i_1}(0) - K_{i_1,i_2\alpha_3}(0)\cdot Z_{\alpha_3} - K_{i_2\alpha_1\alpha_3}(0)\, Z_{\alpha_3} + \\ + K_{i_3,i_1i_2}(0)\, X_{i_3} - K_{j_3,i_1i_2}(0)\, Y_{j_3} + O(Z^2).$$

Это равенство, очевидно, можно привести к виду

$$K_{i_1i_2}(Z) = -\frac{\partial K_{i_1}(Z)}{\partial X_{i_2}} - \frac{\partial K_{i_2}(Z)}{\partial X_{i_1}} + K_{i_3,i_1i_2}X_{i_3} - K_{j_3,i_1i_2}Y_{j_3} + O(Z^2),$$

или, если учесть (11),

$$K_{i_1i_2}(Z) = 2\frac{\partial^2 F(Z)}{\partial X_{i_1}\partial X_{i_2}} + 2K_{i_3,i_1i_2}X_{i_3} + O(Z^2). \tag{15}$$

Аналогичным образом из (11)—(14) получаем

$$K_{ij}(Z) = 2\frac{\partial^2 F(Z)}{\partial X_i\,\partial Y_j} + 2K_{i_3,ij}Y_{j_3} + O(Z^2); \tag{16}$$

$$K_{j_1j_2}(Z) = 2\frac{\partial^2 F(Z)}{\partial Y_{j_1}\partial Y_{j_2}} + 2K_{i_3,j_1j_2}X_{i_3} + O(Z^2). \tag{17}$$

В полученных равенствах первый член в правой части такой же, как и в (8). Второй член содержит производные $\partial^2 K_{\alpha_3}(Z)/\partial Z_{\alpha_1}\partial Z_{\alpha_2}$. Его вовсе не нужно учитывать в (16) в том частном случае, когда временно-четные переменные X_i отсутствуют, т. е. когда все рассматриваемые параметры временно-нечетные. В противоположном случае, когда все параметры временно-четные, комбинацией равенств (10) и (11) легко получить

$$K_{i_3,\alpha_1\alpha_2}(0)\, X_{i_3} = K_{\alpha,\alpha_1\alpha_2}(0)\, Z_\alpha = -2\frac{\partial^2 F(Z)}{\partial Z_{\alpha_1}\partial Z_{\alpha_2}} - \frac{\partial K_{\alpha_1}(Z)}{\partial Z_{\alpha_2}} - \frac{\partial K_{\alpha_2}(Z)}{\partial Z_{\alpha_1}} + O(Z^2),$$

и формула (15) принимает вид

$$K_{i_1i_2}(X) = -2\frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_{i_1}\partial X_{i_2}} - 2\frac{\partial K_{i_1}(X)}{\partial X_{i_2}} - 2\frac{\partial K_{i_2}(X)}{\partial X_{i_1}} + O(X^2). \tag{18}$$

Формулы (15)—(18) уточняют равенства (8) и в первом приближении правильно передают непостоянство диффузионных коэффициентов.

К линейно-квадратичной теории относится еще вычисление коэффициентов третьего порядка $K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$, точнее говоря, их постоянных значений — значений в равновесной точке. Эта задача полностью решается при помощи соотношений (III. 3а, в) из [1], дающих

$$K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = O(Z) \tag{19}$$

(среди α_1, α_2, α_3 имеется нечетное число временно-четных индексов i) и соотношений (III. 2б, г), которые вследствие (14), (11) весьма просто записываются при помощи диссипативной функции

$$K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = -4\frac{\partial^3 F(Z)}{\partial Z_{\alpha_1}\partial Z_{\alpha_2}\partial Z_{\alpha_3}} + O(Z) \tag{20}$$

(среди $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ четное число временно-четных индексов). В (19) и (20) значения $K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ и $\partial^3 F/\partial Z_{\alpha_1}\partial Z_{\alpha_2}\partial Z_{\alpha_3}$ не обязательно берутся в нулевой точке.

Этим исчерпываются основные следствия линейно-квадратичной теории.

§ 3. Как выражаются флуктуационные характеристики через диссипационные в кубической (четырехиндексной) теории

Если мы хотим уточнить результаты предыдущего параграфа, то следует обратиться к четырехиндексным соотношениям, приведенным в § 1. К сожалению, этих соотношений недостаточно, чтобы полностью выразить четырехиндексные флуктуационные характеристики через диссипационные характеристики, определяемые из феноменологических (макроскопических) уравнений. Остается еще некоторый произвол, для преодоления которого нужно обратиться к динамическим (микроскопическим) соотношениям, не рассматриваемым в настоящей статье.

Начнем с соотношений (IV. 1а, в, д) из § 1, которые имеют вид

$$2K_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_4} + K_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} + K_{\alpha_1\alpha_3,\alpha_2\alpha_4} + K_{\alpha_1\alpha_4,\alpha_2\alpha_3} = \frac{1}{2}K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \tag{21}$$

(число временно-четных индексов четно). Как показано в [3], отсюда можно получить

$$K_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} - K_{\alpha_3\alpha_4,\alpha_1\alpha_2} = K_{\alpha_3,\alpha_1\alpha_2\alpha_4} + K_{\alpha_4,\alpha_1\alpha_2\alpha_3} - K_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_4} - K_{\alpha_2,\alpha_1\alpha_3\alpha_4}. \tag{22}$$

Суммы же

$$L_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = K_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} + K_{\alpha_3\alpha_4,\alpha_1\alpha_2} \tag{23}$$

не определяются соотношениями (21) вполне однозначно. Они связаны согласно (21) равенством

$$L_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} + L_{\alpha_1\alpha_3,\alpha_2\alpha_4} + L_{\alpha_1\alpha_4,\alpha_2\alpha_3} =$$
$$= K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} - K_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_4} - K_{\alpha_2,\alpha_1\alpha_3\alpha_4} - K_{\alpha_3,\alpha_1\alpha_2\alpha_4} - K_{\alpha_4,\alpha_1\alpha_2\alpha_3}. \tag{24}$$

Перейдем к соотношениям (IV. 1б, г), записываемым в виде

$$K_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} + K_{\alpha_3\alpha_4,\alpha_1\alpha_2} = -K_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_4} - K_{\alpha_2,\alpha_1\alpha_3\alpha_4} - K_{\alpha_3,\alpha_1\alpha_2\alpha_4} - K_{\alpha_4,\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \tag{25}$$

(число временно-четных индексов нечетно). Здесь, напротив, суммы (23) полностью определены, а разности

$$M_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = K_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} - K_{\alpha_3\alpha_4,\alpha_1\alpha_2} \tag{26}$$

остаются неопределенными.

Четырехиндексные матрицы $L_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4}$, $M_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4}$, как следует из их определения (23) и (26), обладают такими свойствами симметрии

$$L_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = L_{\alpha_2\alpha_1,\alpha_3\alpha_4};\ M_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = M_{\alpha_2\alpha_1,\alpha_3\alpha_4};$$
$$L_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = L_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_4\alpha_3};\ M_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = M_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_4\alpha_3};$$
$$L_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = L_{\alpha_3\alpha_4,\alpha_1\alpha_2};\ M_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} = -M_{\alpha_3\alpha_4,\alpha_1\alpha_2},$$

которые уменьшают число феноменологически неопределяемых параметров. После того как выбраны (из каких-либо динамических, нефеноменологических соображений) матрица $L_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4}$ для четного числа временно-четных индексов и матрица $M_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4}$ для их нечетного числа, нужно использовать формулы (22) и (25) и найти квадратичный по Z вклад

$$\frac{1}{2} K_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} \cdot Z_{\alpha_3} \cdot Z_{\alpha_4} = \frac{1}{4} (L_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4} + M_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4}) Z_{\alpha_3} \cdot Z_{\alpha_4}$$

в диффузионные коэффициенты $K_{\alpha_1\alpha_2}(Z)$. Тем самым непостоянство этих коэффициентов будет рассчитано на порядок более точно, чем в § 2. Не лишне отметить, что входящая в (25) и (24) комбинация третьих производных пропорциональна четвертой производной от диссипативной функции в нулевой точке:

$$K_{\alpha_1,\alpha_2\alpha_3\alpha_4} + K_{\alpha_2,\alpha_1\alpha_3\alpha_4} + K_{\alpha_3,\alpha_1\alpha_2\alpha_4} + K_{\alpha_4,\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = -2 \frac{\partial^4 F(Z)}{\partial Z_{\alpha_1} \partial Z_{\alpha_2} \partial Z_{\alpha_3} \partial Z_{\alpha_4}}$$

при $Z = 0$.

После того как найдены вторые производные $K_{\alpha_1\alpha_2,\alpha_3\alpha_4}$, не представляет труда отыскать прочие четырехиндексные флуктуационные характеристики. Так, формулы (IV.4б, г) и (24) полностью определяют коэффициенты четвертого порядка $K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(0)$, а формулы (IV.3а, в, д) и (IV.2б, г) из § 1 — первые производные $K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\alpha_4}(0)$.

Из вышеизложенного видно, что в отношении проблемы выражения флуктуационных характеристик через диссипационные в случае наличия параметров различной временной четности ситуация в принципе такая же, как и в развитой ранее теории, ограничивающейся рассмотрением только временно-четных параметров.

В последующих статьях будут рассмотрены примеры применения изложенной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., 11, № 5, 1970.
2. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 5, 16—29, 1962.
3. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 4, 84—89, 1967.
4. Стратонович Р. Л. «Вестн. Моск. ун-та», физ., астрон., № 1, 40—46, 1969.

Поступила в редакцию
12.5 1969 г.

Кафедра
общей физики для мехмата